

Лекция 6
10 октября 2026 года

кандидат физико-математических наук

ТЕРЕЩЕНКО ГЕОРГИЙ ВИКТОРОВИЧ
gvter@yandex.ru

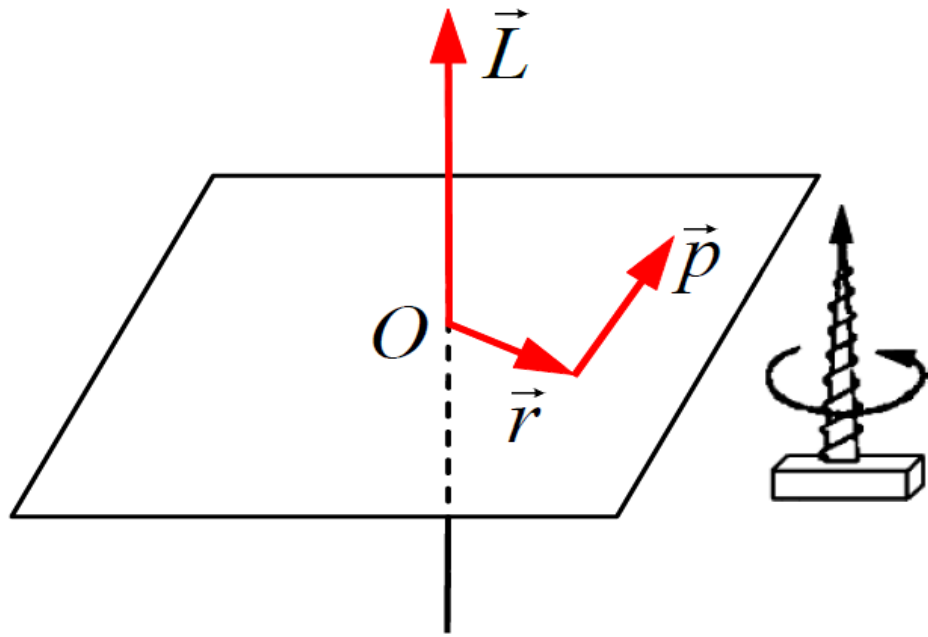


Механика твёрдого тела

Момент импульса и закон его сохранения

Моментом импульса (количества движения) **материальной точки A относительно неподвижной точки O** называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}].$$



Моментом импульса относительно неподвижной оси z называется скалярная величина L_z , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определённого относительно произвольной точки O данной оси. Значение момента импульса L_z не зависит от положения точки O на оси z .

При вращении абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси каждая точка тела движется по окружности постоянного радиуса $\vec{r}_i$ со скоростью $\vec{v}_i$ перпендикулярной радиусу. Момент импульса отдельной частицы равен $L_{iz} = m_i v_i r_i$ и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта (совпадает с направлением вектора угловой скорости $\vec{\omega}$).

Момент импульса твёрдого тела относительно оси есть **сумма моментов импульса отдельных частиц**:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^n m_i \omega r_i^2 = J_z \omega$$

Продифференцируем по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \beta = M_z .$$

В векторной форме: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}}$ – **ещё одна форма уравнения динамики вращательного движения твёрдого тела.**

В замкнутой системе момент внешних сил $\vec{M} = 0$, следовательно, и $\dot{\vec{L}} = 0$.

Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени: $\vec{L} = \text{const}$

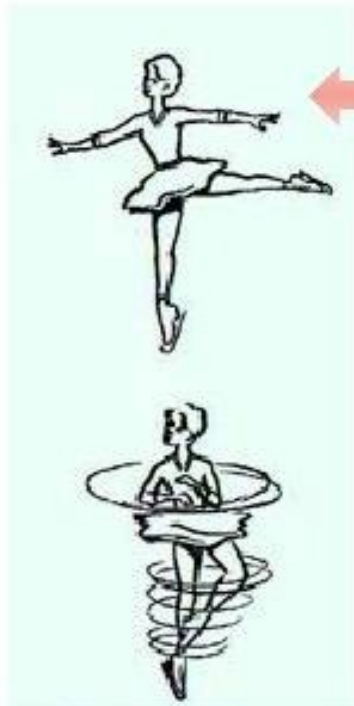
Это – фундаментальный закон природы. Он является следствием изотропности пространства: инвариантность физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчёта.

При равномерном вращении твёрдого тела относительно некоторой оси z закон сохранения момента импульса $\vec{L} = \text{const}$ равносильен: $J_z \omega = \text{const}$.

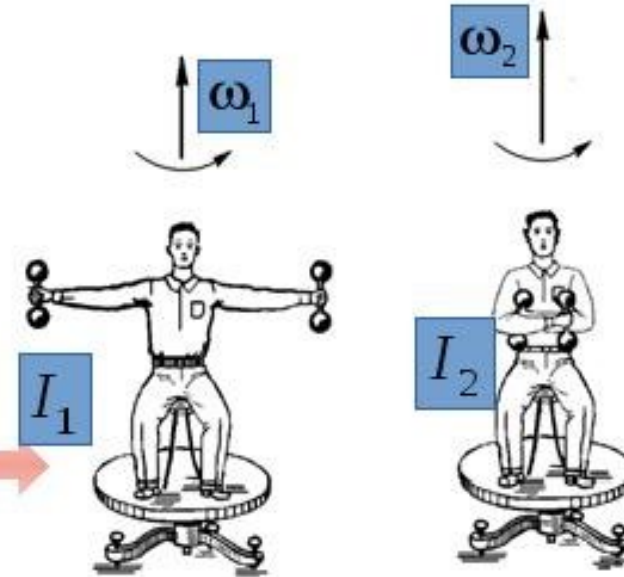
Примеры

- Скамья Жуковского

$$I_1 > I_2 \Rightarrow \omega_1 < \omega_2$$



$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

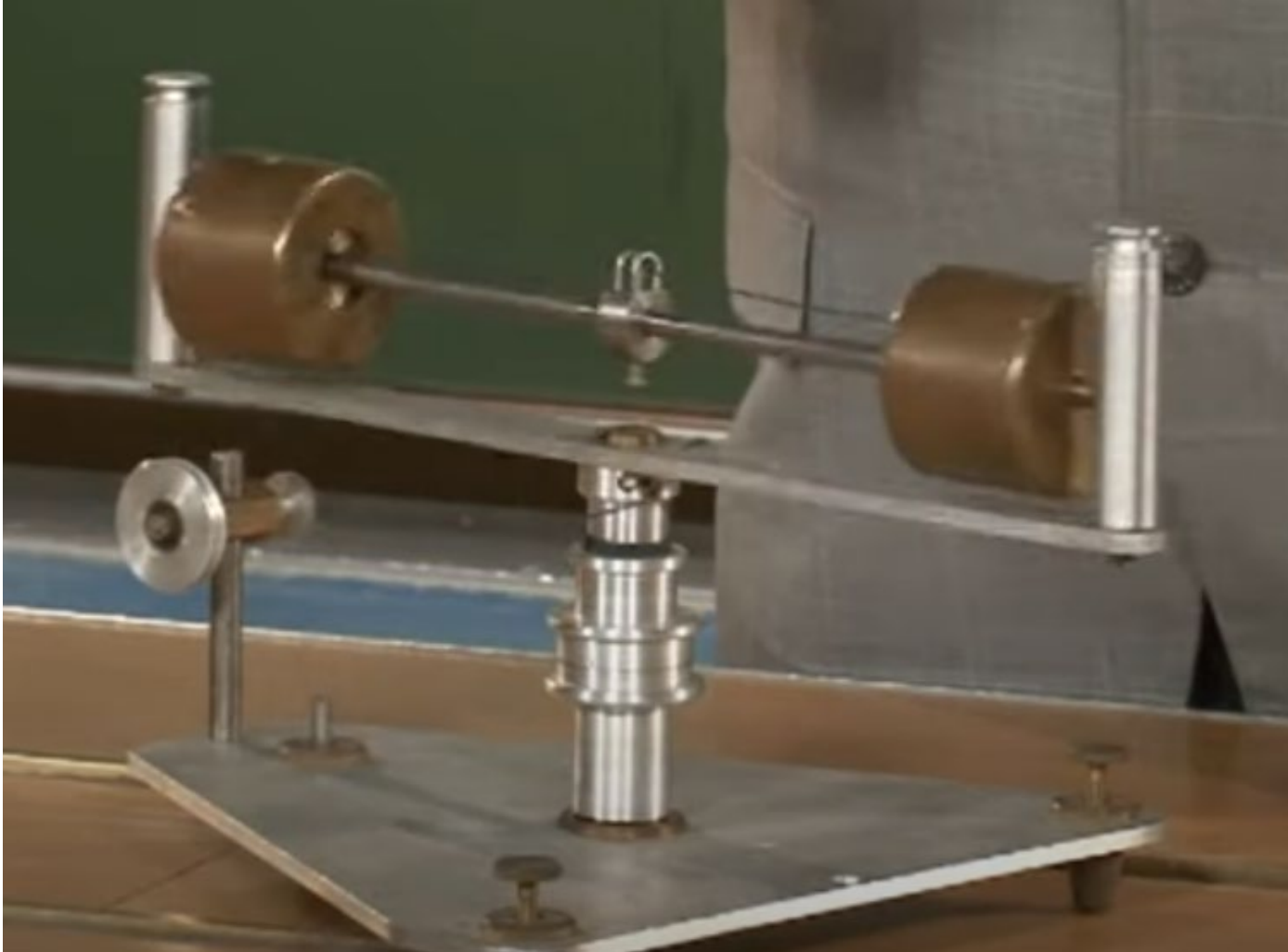


- Фигурное катание на льду

https://vk.ru/wall-205289108_150



https://vk.ru/wall-205289108_150



Сравнительная таблица основных величин и соотношений для поступательного движения тела и для его вращения вокруг неподвижной оси

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Перемещение	$d\vec{r}$	Угловое перемещение	$d\vec{\phi}$
Скорость	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}}$
Ускорение	$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$	Угловое ускорение	$\vec{\beta} = \dot{\vec{\omega}}$
Сила	$\vec{F}$	Момент силы	$\vec{M}$
Импульс	$\vec{p}$	Момент импульса	$\vec{L}$
Работа	$dA = F_s ds$	Работа	$dA = M_z d\phi$
Кинетическая энергия	$mv^2 / 2$	Кинетическая энергия	$J_z \omega^2 / 2$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a}$	Основное уравнение динамики	$\vec{M} = J \cdot \vec{\beta}$
	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$		$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Поле сил тяготения

Закон всемирного тяготения: между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними.

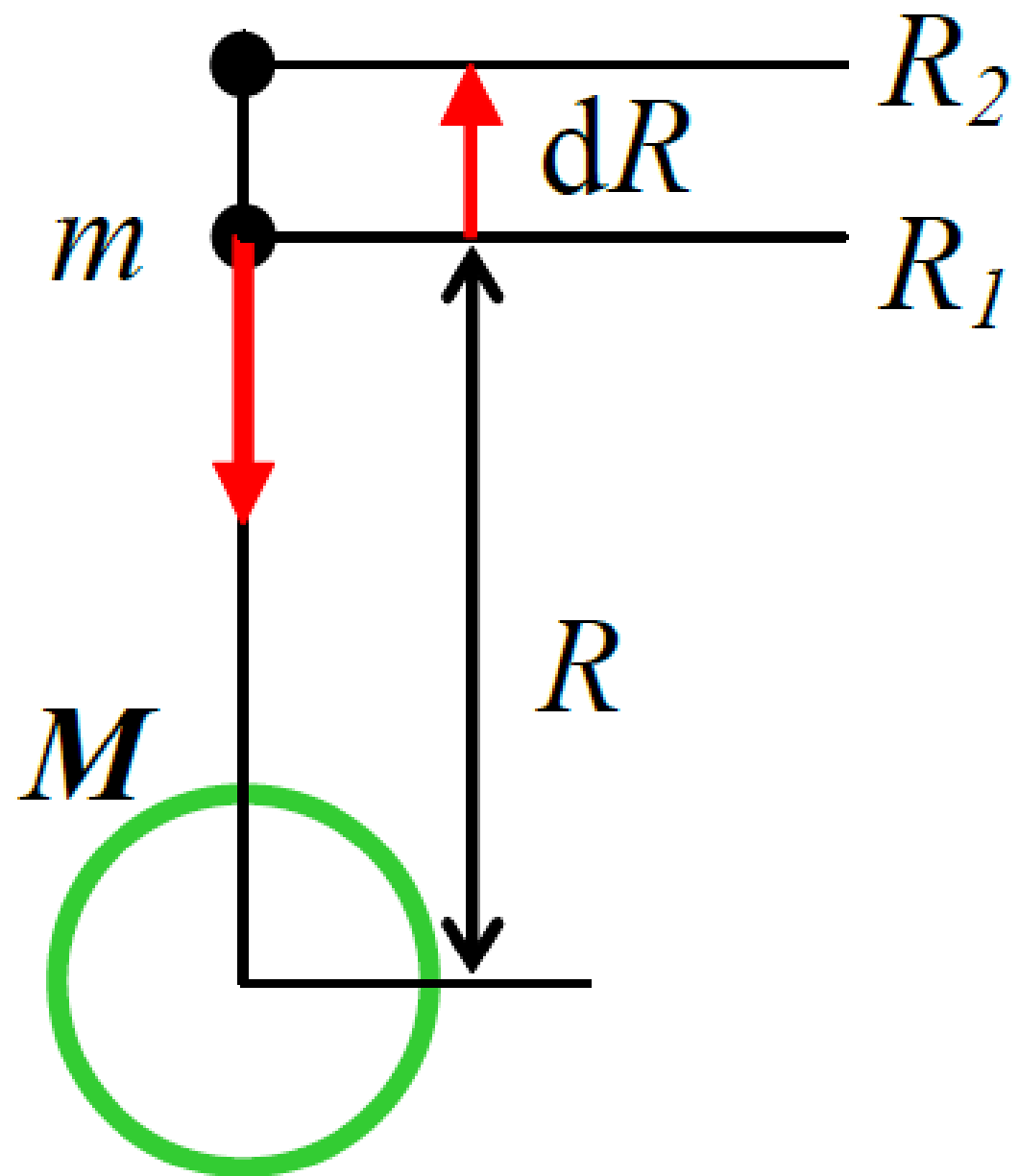
$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Здесь $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$ – **гравитационная постоянная**.

Эта сила называется **гравитационной**, или **силой всемирного тяготения**. Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела.

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью поля тяготения, или гравитационного поля.

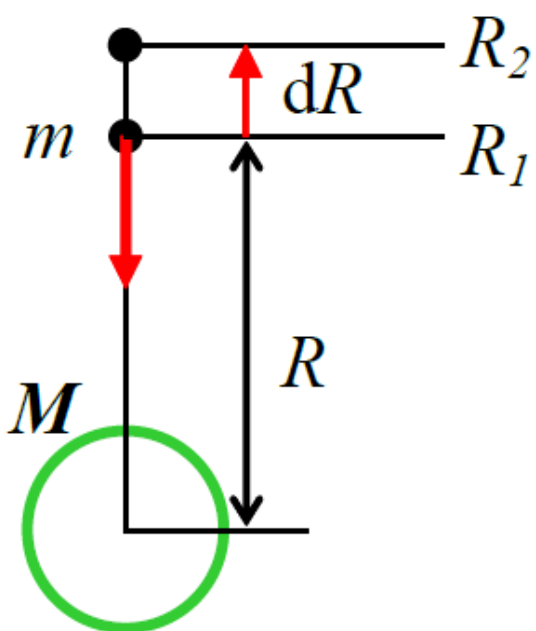
На примере гравитационного поля рассмотрим понятия **напряжённости** поля и **потенциала** поля.



В гравитационном поле Земли $\vec{F} = m\vec{g}$, откуда $E = g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} = \frac{GM}{(R_3 + h)^2}$,

где R_3 – радиус Земли, масса которой M , h – расстояние от центра тяжести тела до поверхности Земли. При перемещении тела массой m на расстояние

dR поле тяготения совершает работу $dA = \vec{F} d\vec{R} = -G \frac{mM}{R^2} dR$ (знак минус



потому, что сила и перемещение *противонаправлены*).

При перемещении тела с расстояния R_1 до расстояния R_2 :

$$A = - \int_{R_1}^{R_2} G \frac{mM}{R^2} dR = -m \left(\frac{GM}{R_2} - \frac{GM}{R_1} \right).$$

Работа *не зависит от траектории перемещения, а определяется только начальным и конечным положениями тела.*

Следовательно, силы тяготения *консервативны*, а поле тяготения является *потенциальным*. Работа консервативных сил равна изменению потенциальной энергии системы с обратным знаком. $A = -(W_2 - W_1)$. Поэтому, **потенциальная**

энергия поля сил тяготения:
$$W = -G \frac{mM}{R}.$$

Для любого потенциального поля можно определить **скалярную энергетическую** характеристику поля – **потенциал**.

Потенциалом поля тяготения в данной точке поля называется скалярная величина, равная отношению потенциальной энергии материальной точки, помещённой в рассматриваемую точку поля, к массе материальной точки:

$$\varphi = \frac{W}{m} = -G \frac{M}{R}$$

Рассмотрим связь между потенциалом поля тяготения и его напряжённостью:

$$dA = -m d\varphi, \quad dA = F dr = mg dr \Rightarrow g = -\frac{d\varphi}{dr} \quad \text{или} \quad \vec{g} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi.$$

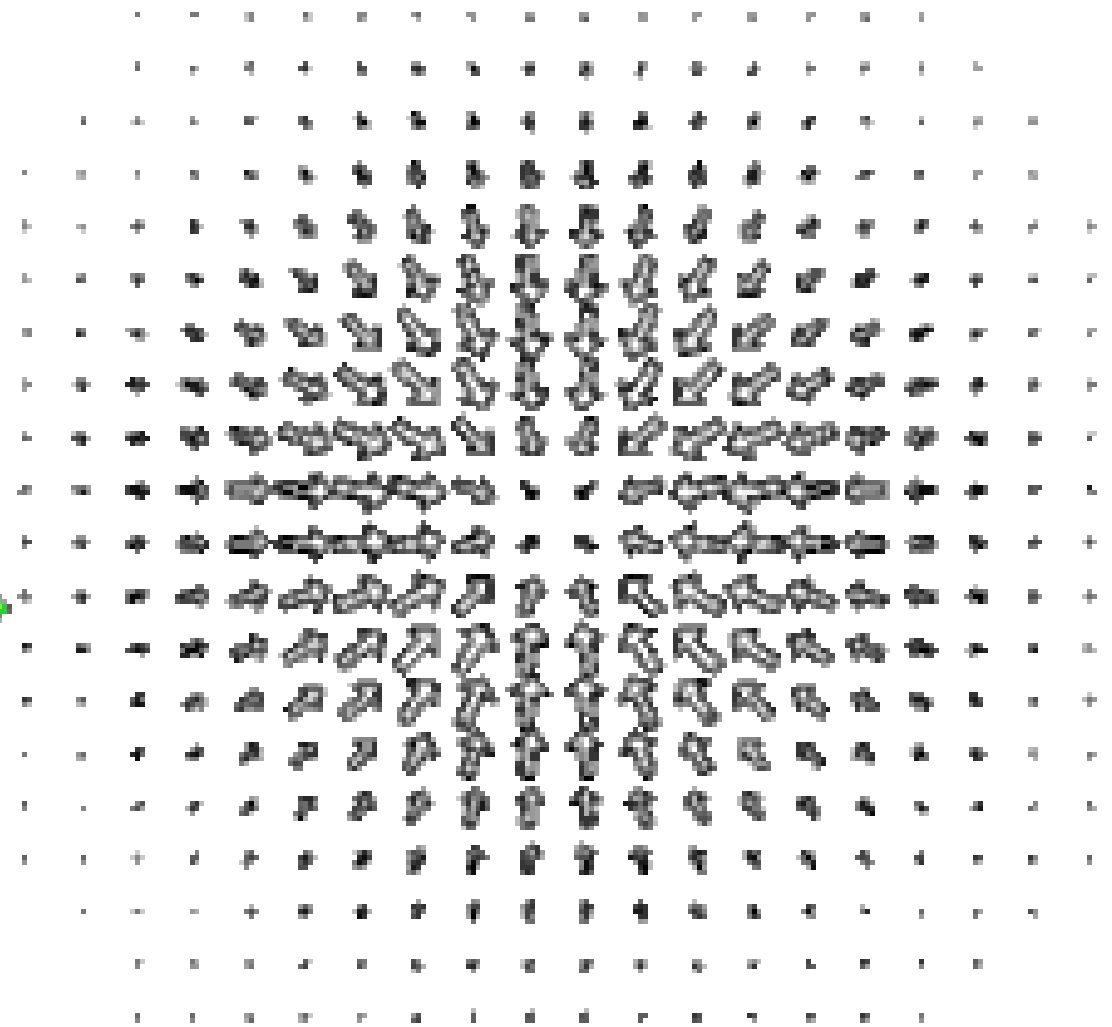
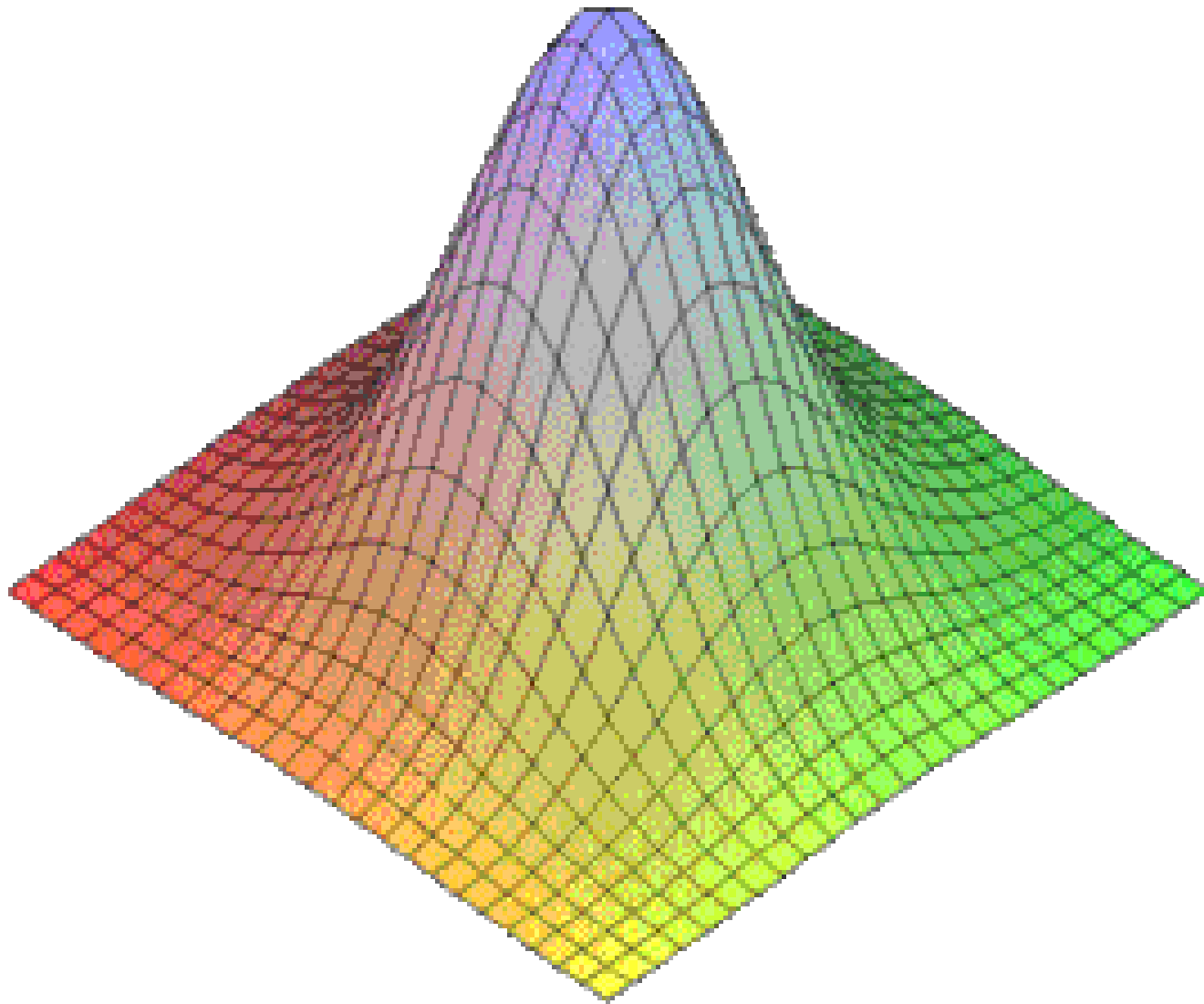
В общем случае для любого потенциального поля между напряжённостью и потенциалом существует связь:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi.$$

Эта формула является следствием соотношения $\vec{F} = -\text{grad } \Pi = -\nabla \Pi$. Знак **минус** указывает на то, что вектор напряжённости направлен в сторону **убывания** потенциала.

Гради́ент (от лат. *gradiens* — «шагающий, растущий») — вектор, своим направлением указывающий направление наискорейшего роста некоторой скалярной величины φ (значение которой меняется от одной точки пространства к другой, образуя скалярное поле). Этот вектор ортогонален изоповерхности $\varphi = \text{const}$.

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z.$$



Оператор градиента преобразует холм (слева), если смотреть на него сверху, в поле векторов (справа). Видно, что векторы направлены «в горку» и чем они длиннее, тем круче наклон.

Космические скорости

Первой космической скоростью называют такую минимальную скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Земли по круговой орбите, т. е. превратиться в искусственный спутник Земли.

$$\frac{GmM}{R^2} = ma_n = m \frac{v_1^2}{R} \quad (2^{\text{й}} \text{ закон Ньютона}); \quad g = \frac{P}{m} = \frac{GM}{R^2} \quad (R - \text{ радиус Земли}).$$

$$v_1 = \sqrt{gR} = 7,9 \text{ км/с} \quad (\text{у поверхности Земли } (h \rightarrow 0)).$$

Второй космической скоростью называется наименьшая скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и превратиться в спутник Солнца. В этом случае кинетическая энергия тела должна быть равна работе, совершаемой против сил тяготения:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \int_R^{\infty} G \frac{mM}{r^2} dr = \frac{GmM}{R} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gR} = 11,2 \text{ км/с}.$$

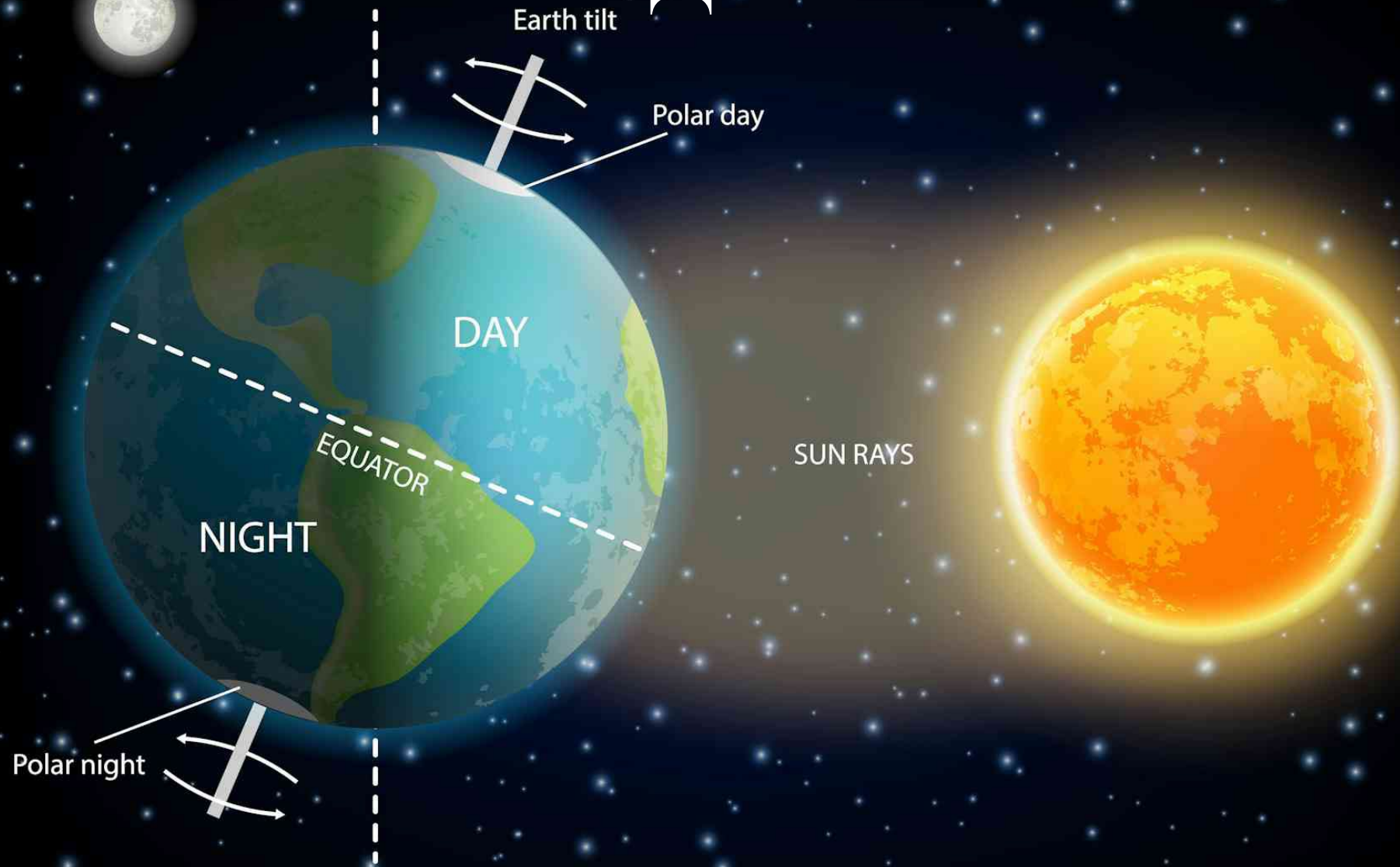
Третьей космической скоростью называется скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца: $v_3 = 16,7 \text{ км/с}.$



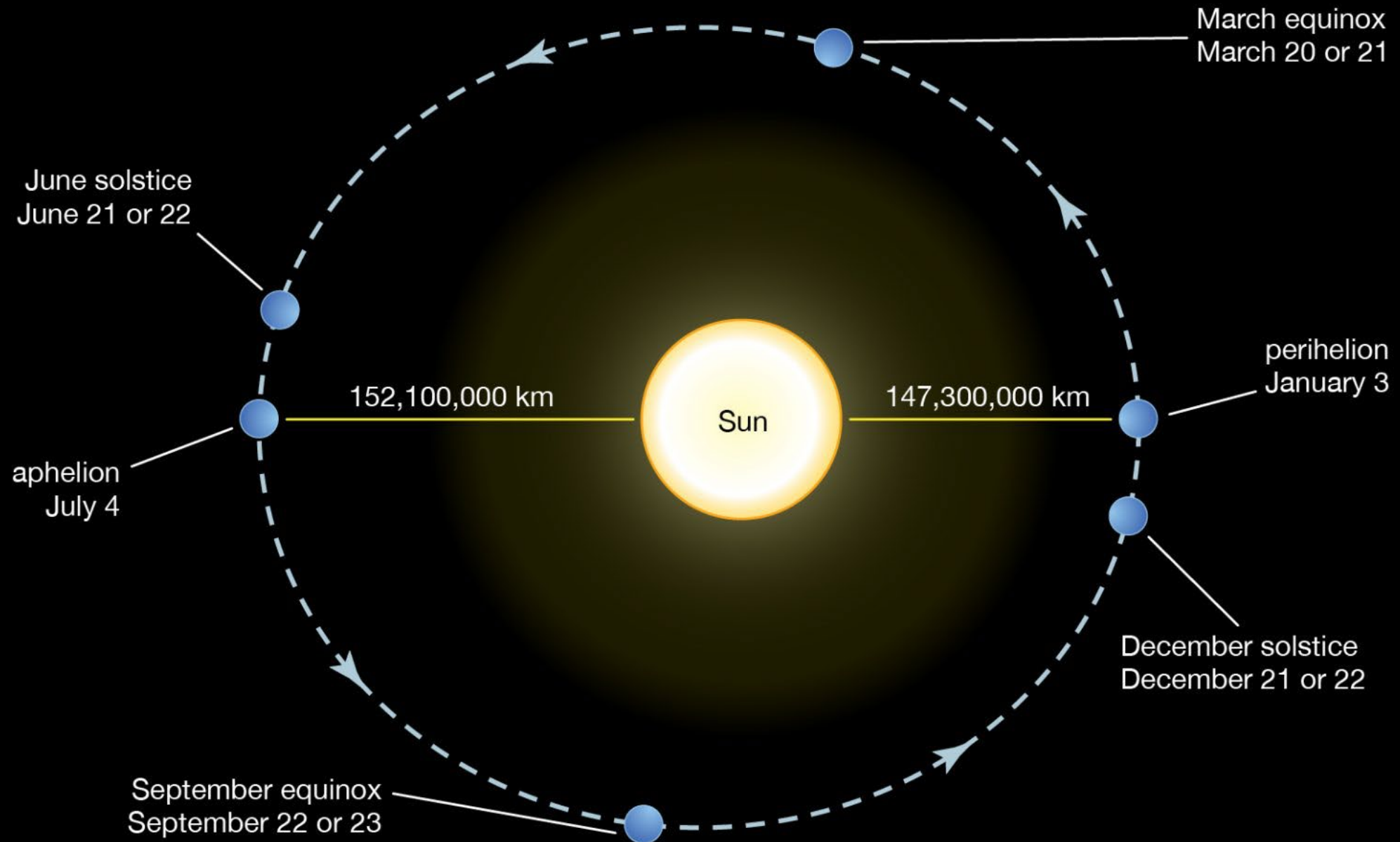
Если телу сообщить скорость, большую первой космической, оно станет двигаться по эллиптической орбите, а достигнув второй космической скорости— $11,2 \text{ км/сек}$,—по параболической. При ещё большей начальной скорости движение тела будет происходить по гиперболической траектории.

ТЕМА:
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ВВЕДЕНИЕ



Earth's orbit around the Sun





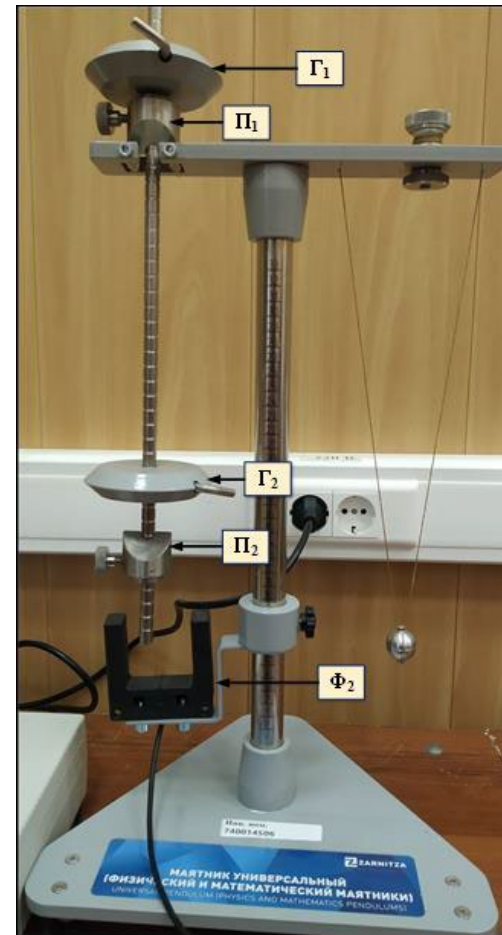




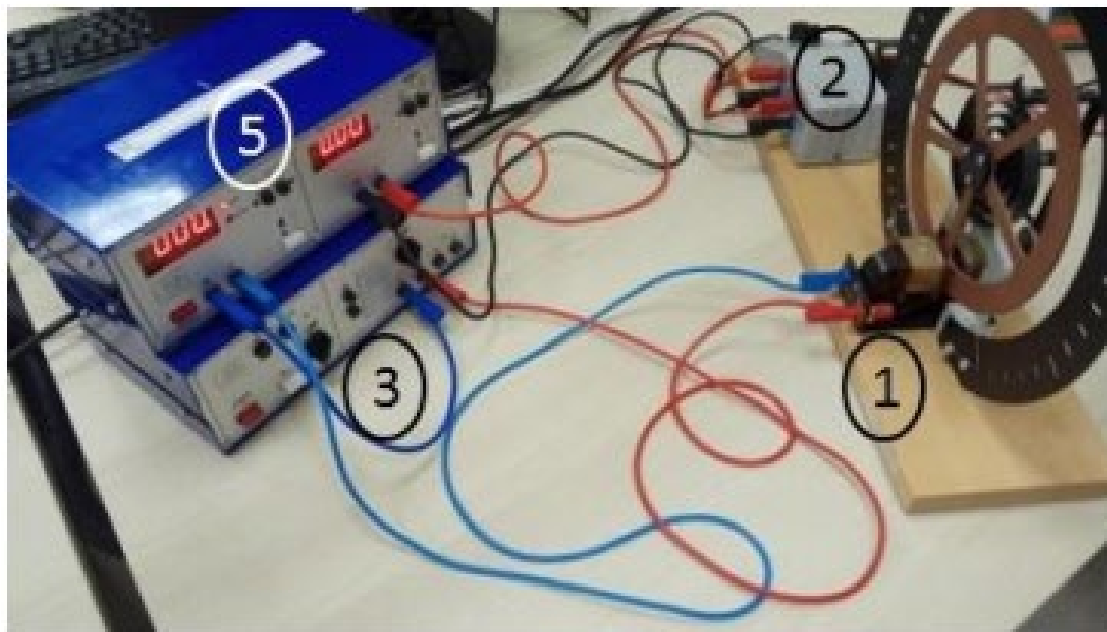


Лабораторная работа № 1.11

Измерение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника

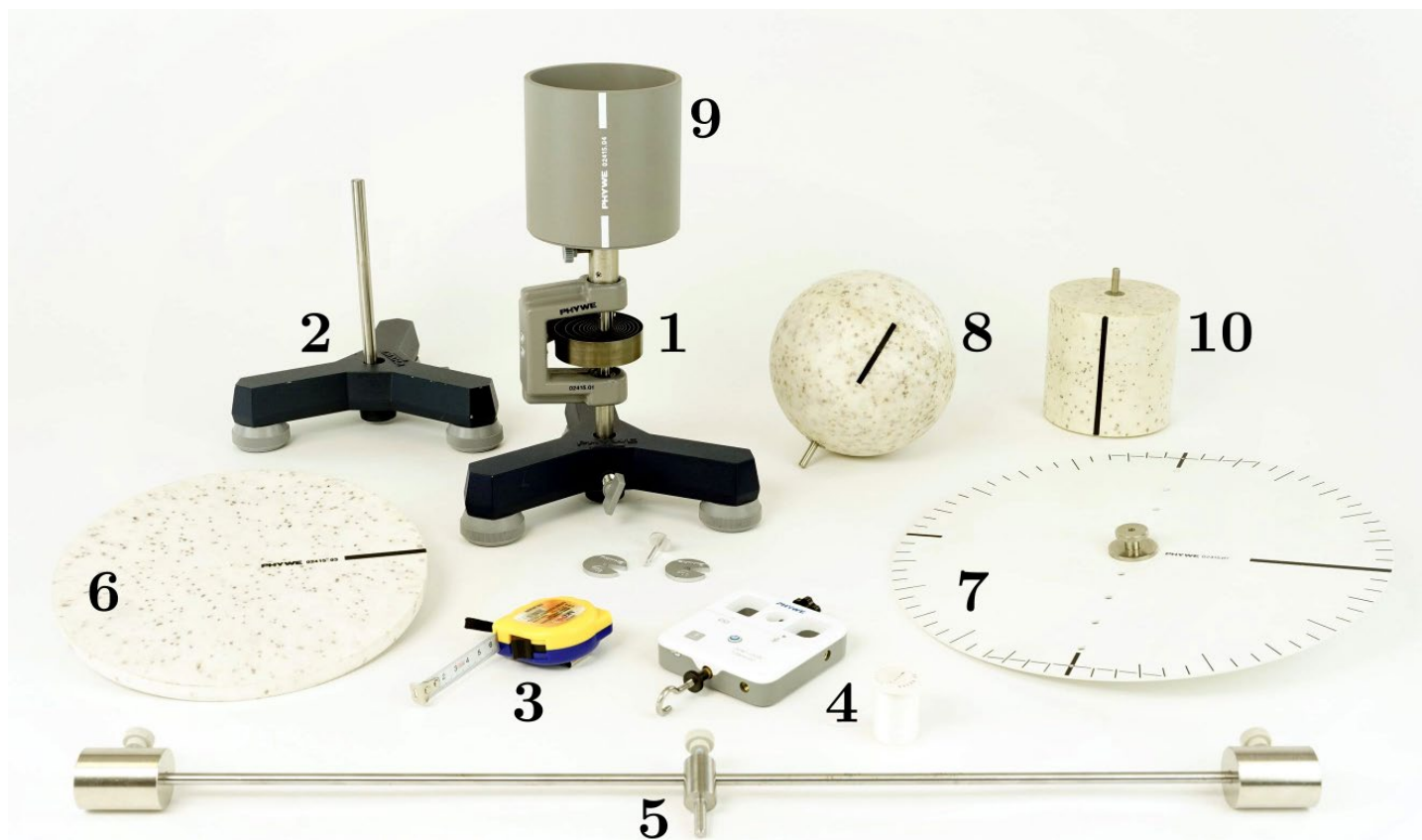


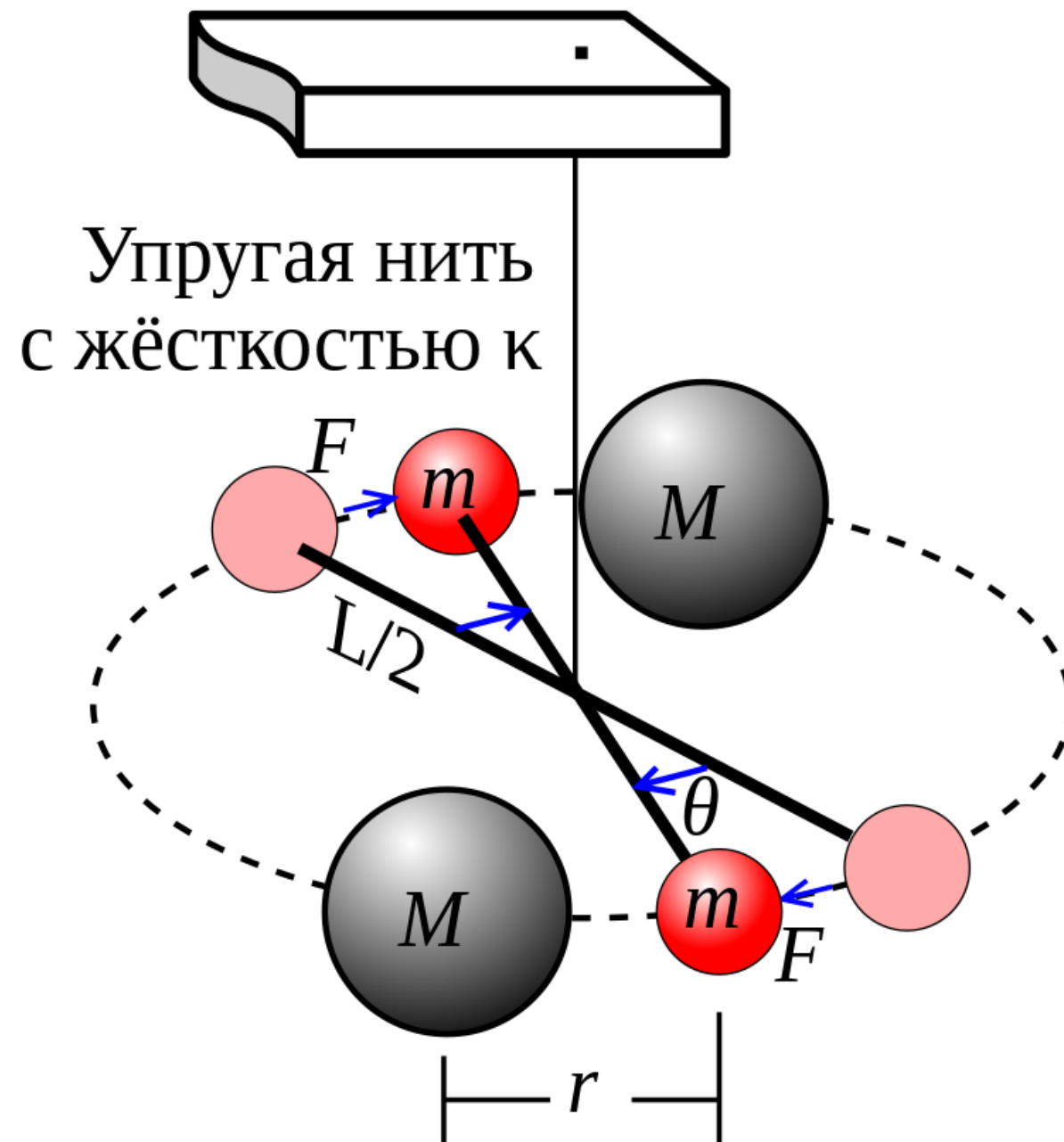
Лабораторная работа № 1.10 Исследование вынужденных крутильных колебаний с регулируемым затуханием с помощью маятника Поля



Лабораторная работа № 1.09

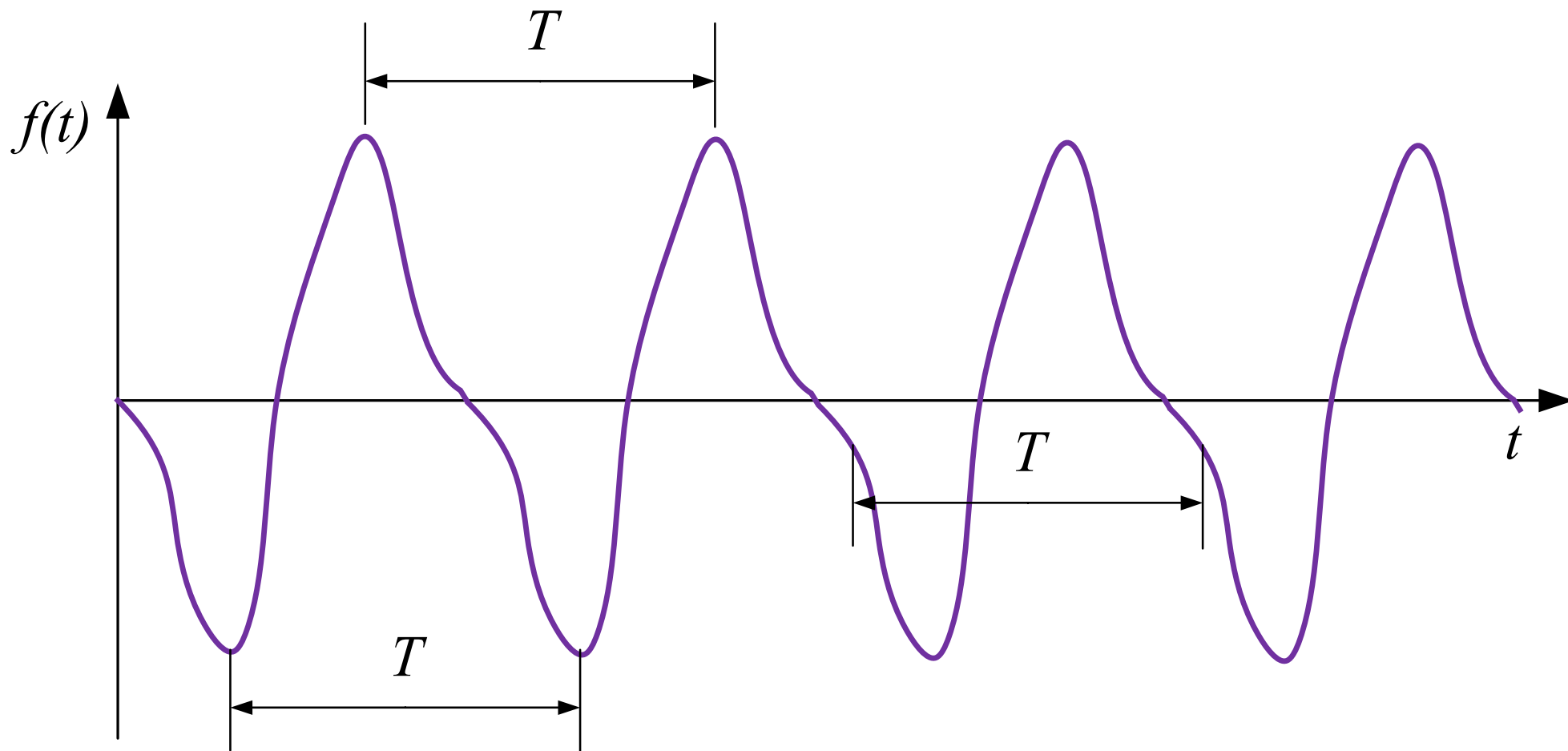
Определение момента инерции методом крутильных колебаний





В периодическом явлении изменение какой-либо величины повторяется в том же виде через совершенно определенное время - период T . Можно дать математическое определение периодической величины: если $f(t)$ есть периодическая функция t с периодом T , то при любом t функция $f(t + T) = f(t)$.

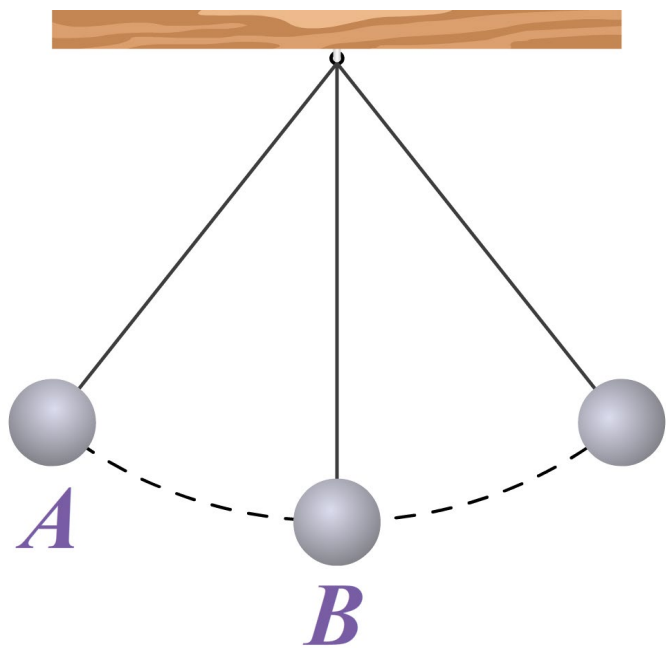
График периодически изменяющейся величины повторяется в точности через период.



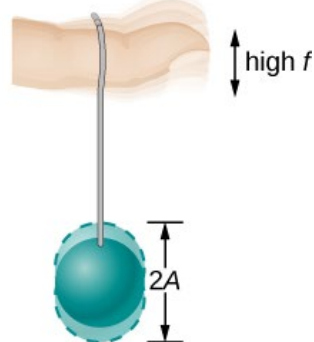
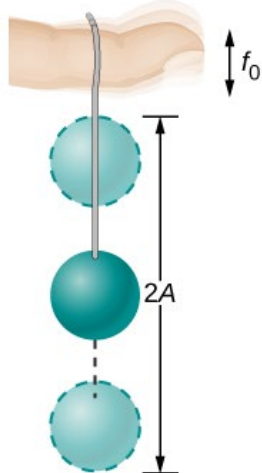
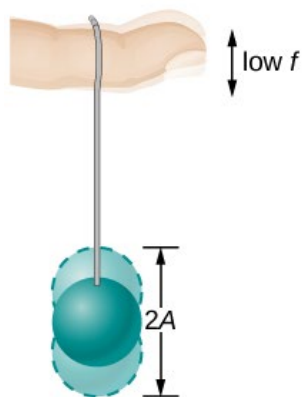
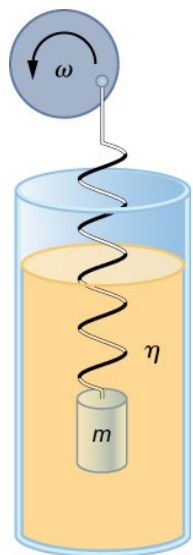
Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени.

Колебательные процессы широко распространены в природе и технике, например, качание маятника часов, переменный электрический ток и т.д. При колебательном движении маятника изменяется координата его центра масс, в случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи.

Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают колебания механические, электромагнитные и др. Однако различные колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями. Отсюда следует целесообразность единого подхода к изучению колебаний различной физической природы.



Колебания называются свободными (или собственными), если они совершаются за счёт первоначально сообщённой энергии, без дальнейшего внешнего воздействия на колебательную систему (систему, совершающую колебания).



Колебания называются вынужденными, если они происходят под действием периодически изменяющейся внешней силы.

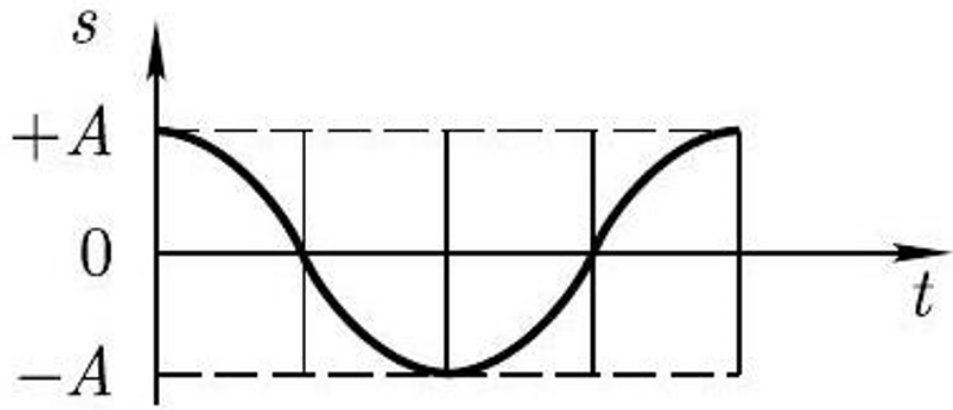
ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Гармоническими колебаниями называются колебания, при которых колеблющаяся физическая величина изменяется по закону синуса (или косинуса).

Различные периодические процессы (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) могут быть представлены в виде суммы (суперпозиции) гармонических колебаний. Гармоническое колебание величины s описывается уравнениями типа:

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$s(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

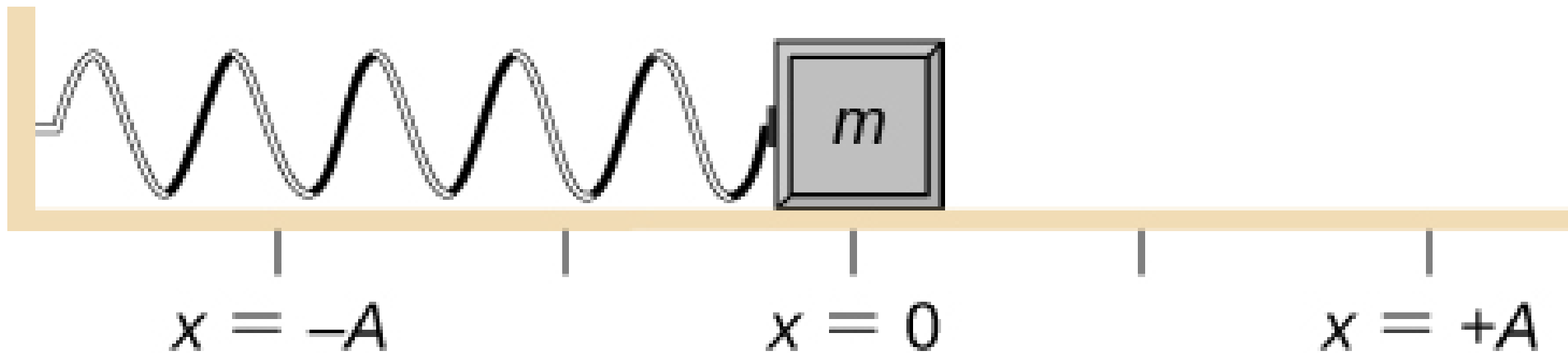


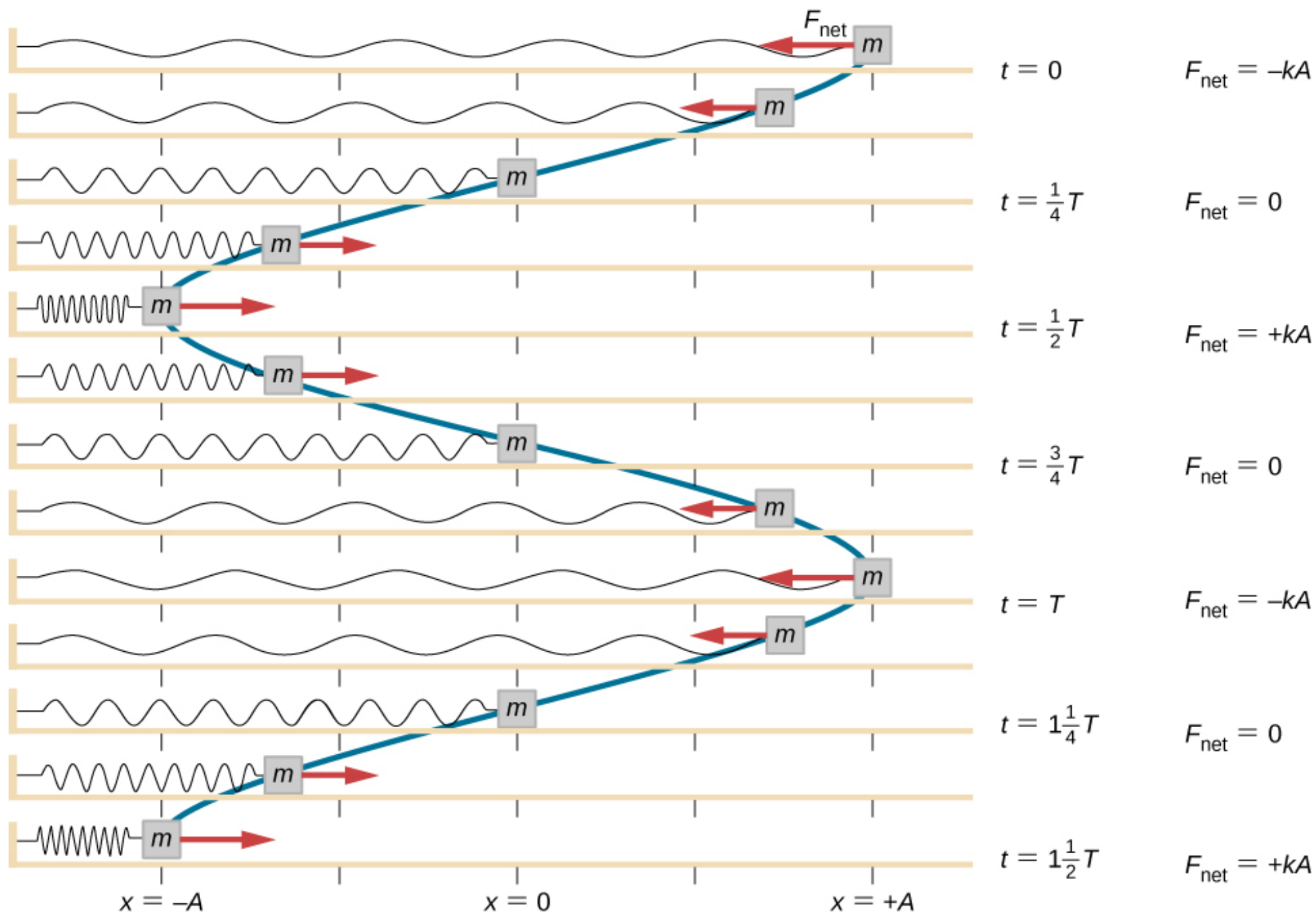
Поскольку косинус изменяется в пределах от -1 до $+1$, значения $s(t)$ лежат в пределах от $-A$ до $+A$.

Наибольшая величина отклонения от положения равновесия A называется амплитудой колебаний.

Амплитуда A – постоянная положительная величина $A = |s_{\max}|$.

Аргумент косинуса - величина $\varphi = (\omega_0 t + \varphi_0)$ называется фазой колебаний.



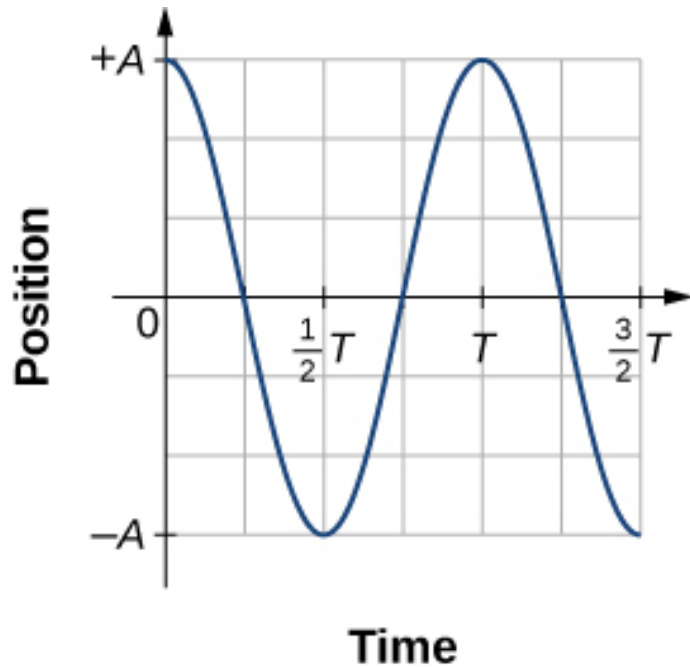


Постоянная величина φ_0 представляет собой значение фазы в момент времени $t = 0$ и называется *начальной фазой* колебаний.

С изменением начала отсчета времени изменяется и φ_0 . Следовательно, значение начальной фазы определяется выбором начала отсчета времени. Так как значения $s(t)$ не изменяется при добавлении или вычитании из фазы целого числа 2π , всегда можно добиться того, чтобы начальная фаза была по модулю меньше π . Поэтому обычно рассматриваются только значения φ_0 , лежащие в пределах от $-\pi$ до $+\pi$.

Период гармонического колебания T это такой промежуток времени, за который фаза колебаний получает приращение, равное 2π , т.е. совершается одно полное колебание.

По истечении времени T , соответствующего периоду колебания, движущаяся точка занимает своё прежнее положение. Следовательно, период колебания T определяется из условия: $[\omega_0(t + T) + \varphi_0] - (\omega_0 t + \varphi_0) = 2\pi$ отсюда:



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Величина ω_0 - называется собственной циклической частотой гармонических колебаний. Значение ω_0 равно числу колебаний за 2π секунд.

Величина ν_0 , обратная периоду колебаний – называется *собственной частотой колебаний*

$$\nu_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} .$$

Число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется частотой колебаний.

$$\omega_0 = 2\pi\nu$$

Единица частоты - герц (Гц): 1 Гц частота периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса.

Гё́нрих Ру́дольф Герц (нем. Heinrich Rudolf Hertz; 22 февраля 1857, Гамбург - 1 января 1894, Бонн) — немецкий физик.



Основное достижение — экспериментальное подтверждение электромагнитной теории света Джеймса Максвелла. Герц доказал существование электромагнитных волн. Он подробно исследовал отражение, интерференцию, дифракцию и поляризацию электромагнитных волн, доказал, что скорость их распространения совпадает со скоростью распространения света, и что свет представляет собой разновидность электромагнитных волн. Он построил электродинамику движущихся тел, исходя из гипотезы о том, что эфир увлекается движущимися телами. Однако его теория электродинамики не подтвердилась опытами и позднее уступила место электронной теории Хендрика Лоренца. Результаты, полученные Герцем, легли в основу создания радио.

Запишем первую и вторую производные по времени от гармонически колеблющейся величины s :

$$\frac{ds}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$	$\sin(\pi + a) = -\sin a$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$	$\cos(\pi + a) = -\cos a$

Запишите в тетради максимальную
скорость и максимальное ускорение

Запишите в тетради определение
производной функции одной
переменной

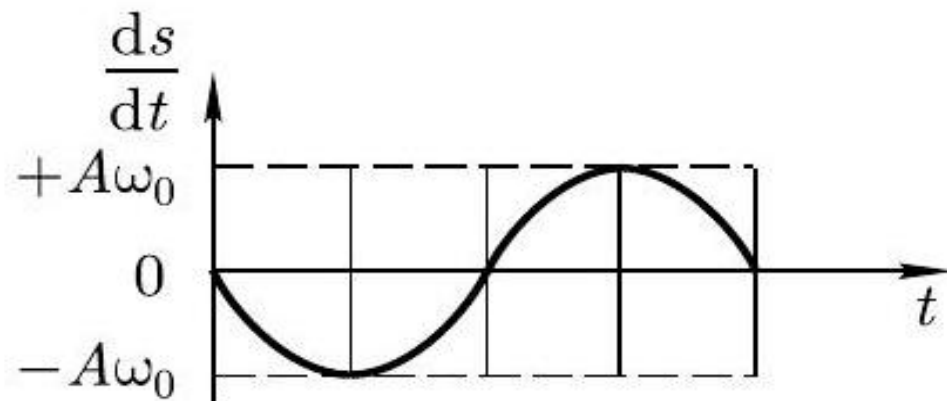
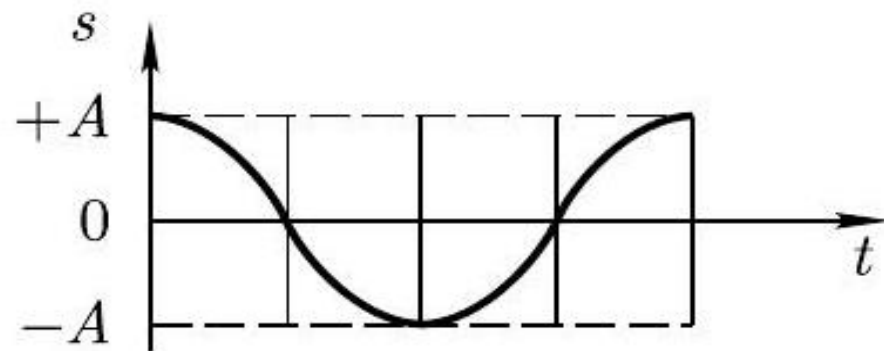
$$v_{\max} = A\omega_0$$

$$a_{\max} = A\omega_0^2$$

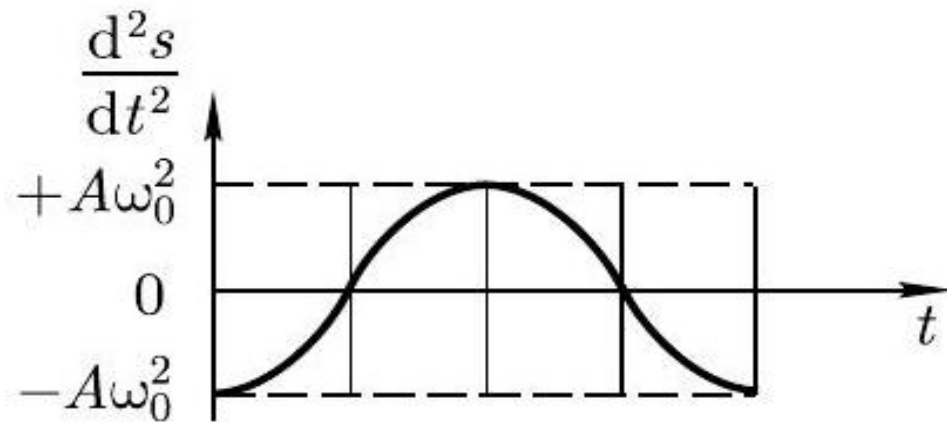
Определение производной

- Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке при $\Delta x \rightarrow 0$ (если он существует).
- Обозначения: $f'(x)$ или y'_x или $\frac{df}{dx}$ или $\frac{dy}{dx}$
- Символическая запись определения:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



$$v_{\max} = A\omega_0$$



$$a_{\max} = A\omega_0^2$$

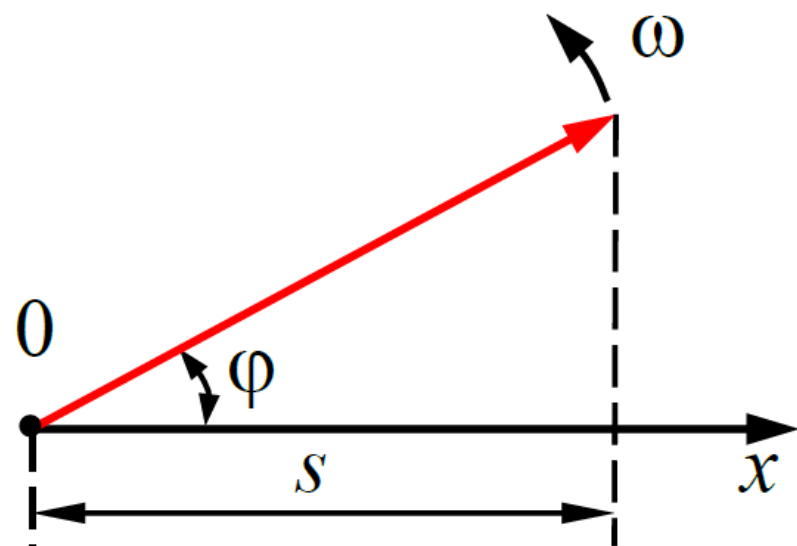
$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} + A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 [A \cos(\omega_0 t + \varphi)] = 0$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot s = 0$$

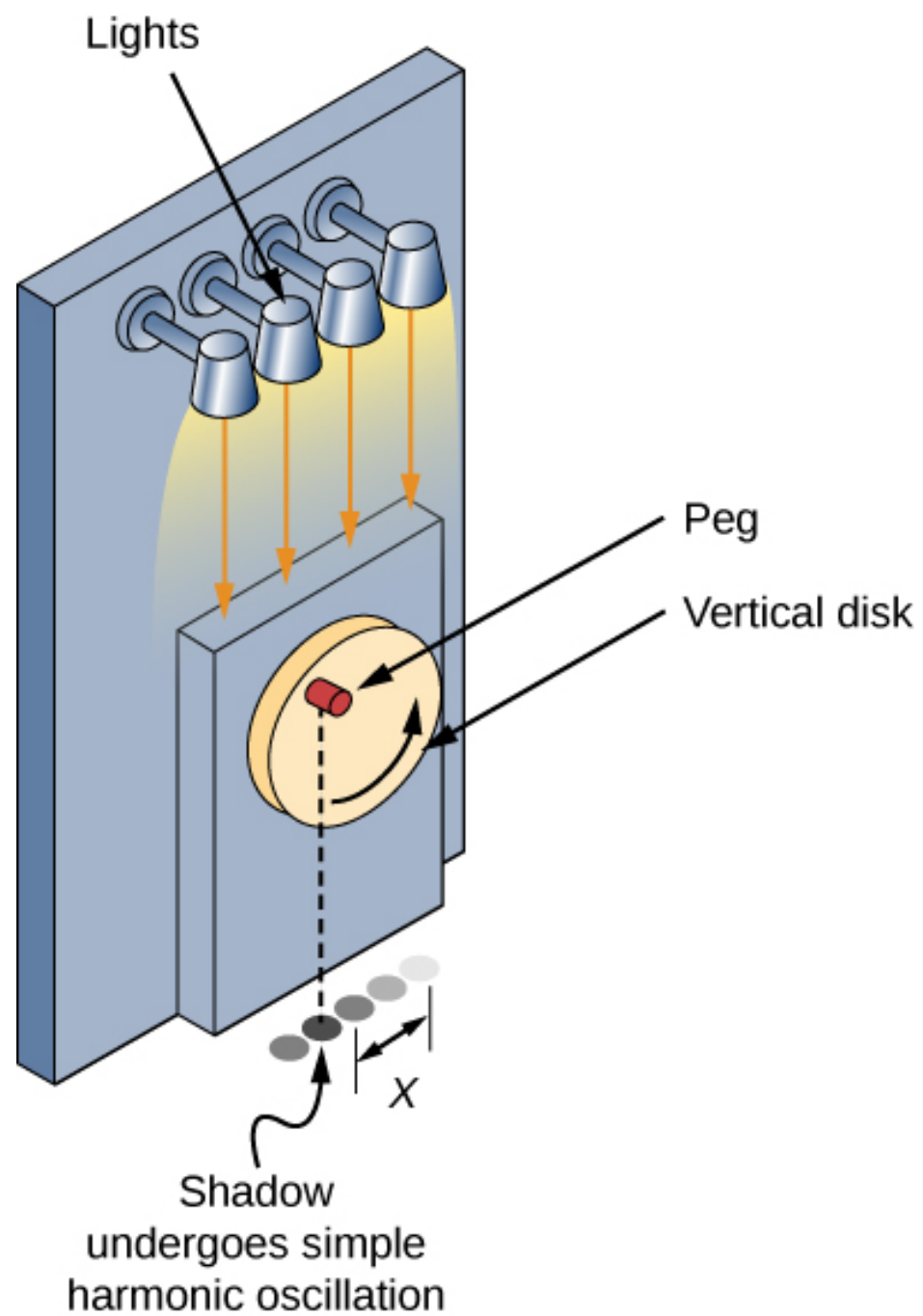
$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot s = 0 \quad - \text{ дифференциальное уравнение гармонических колебаний}$$

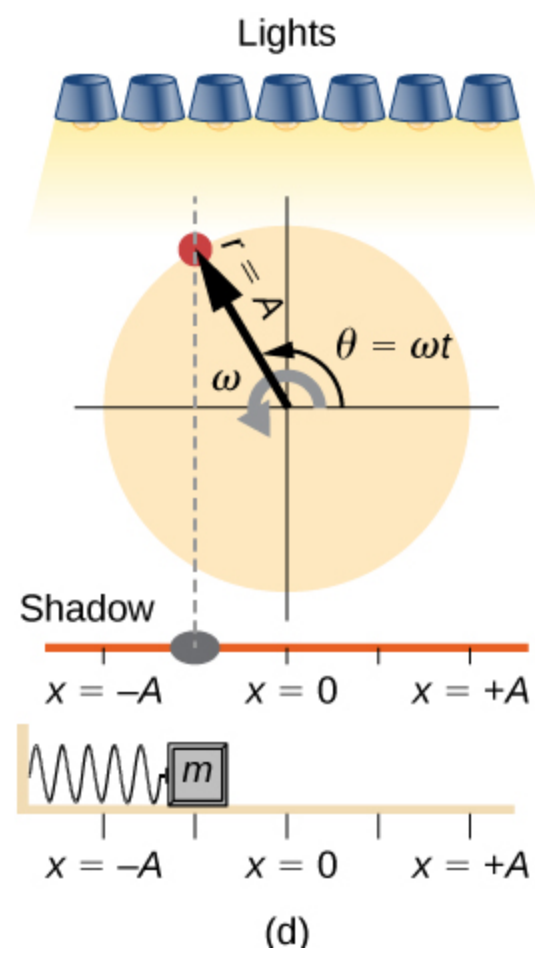
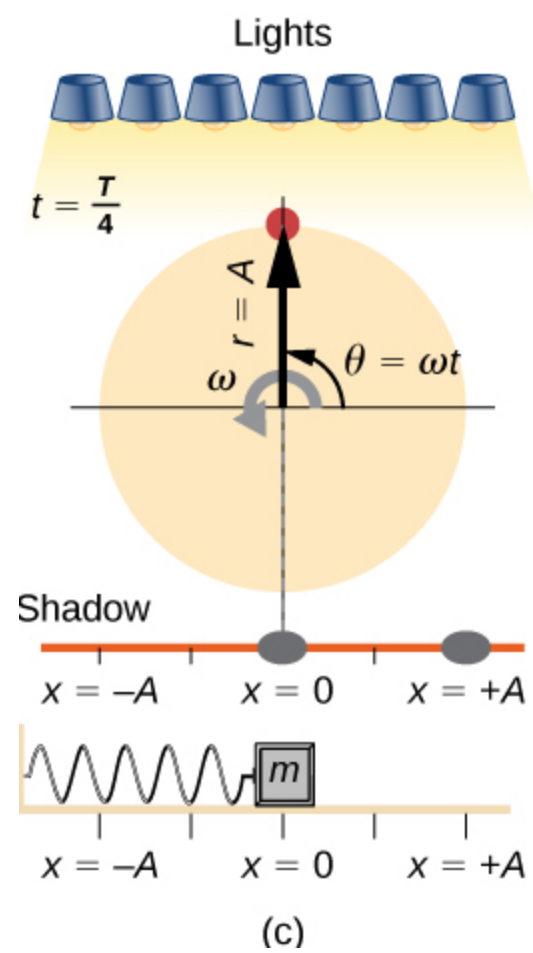
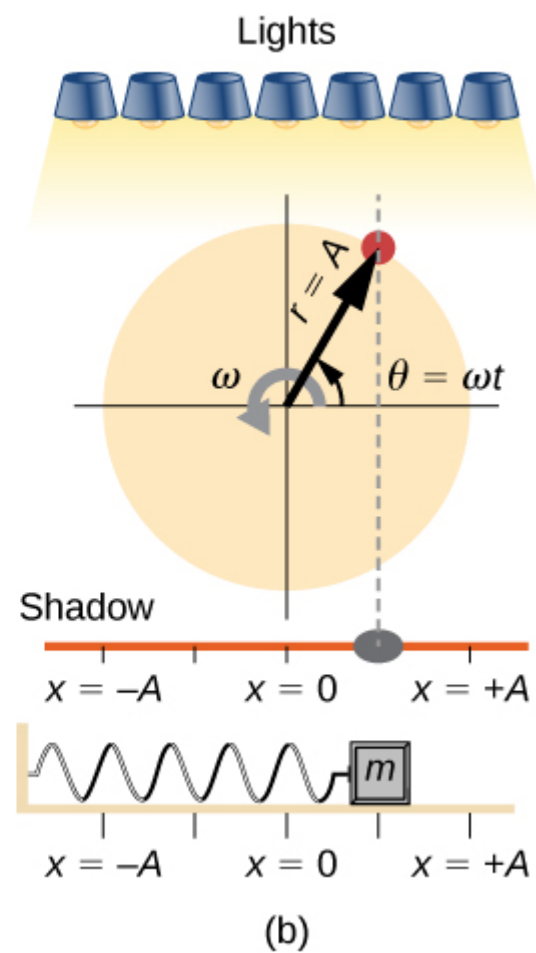
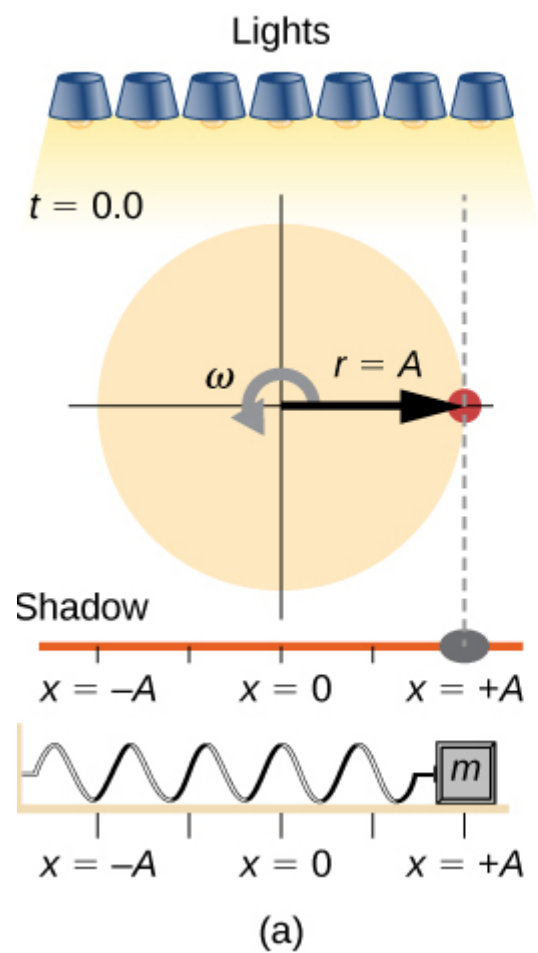
Метод векторных диаграмм



Гармонические колебания изображаются графически **методом вращающегося вектора амплитуды** или **методом векторных диаграмм**.

Из произвольной точки O , выбранной на оси x , под углом φ , равным начальной фазе колебания, откладывается вектор $\vec{A}$, модуль которого равен амплитуде A , рассматриваемого колебания. Если этот вектор будет *вращаться* вокруг точки O с угловой скоростью ω , то проекция вектора на ось x будет совершать колебания по закону $s = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$.





Экспоненциальная форма записи гармонических колебаний

Согласно формуле Эйлера для комплексных чисел:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi ,$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Поэтому уравнение гармонического колебания $s = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ можно записать в *комплексной* экспоненциальной форме

$$\tilde{s} = A e^{i(\omega t + \varphi)} .$$

Физический смысл имеет только *вещественная часть* комплексной функции $\tilde{s}$, которая и представляет собой гармоническое колебание:

$$\operatorname{Re}(\tilde{s}) = A \cos(\omega t + \varphi) = s .$$

Механические гармонические колебания

Пусть материальная точка совершает *прямолинейные* гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия, принятого за начало координат. Тогда для колеблющейся точки

смещение: $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$,

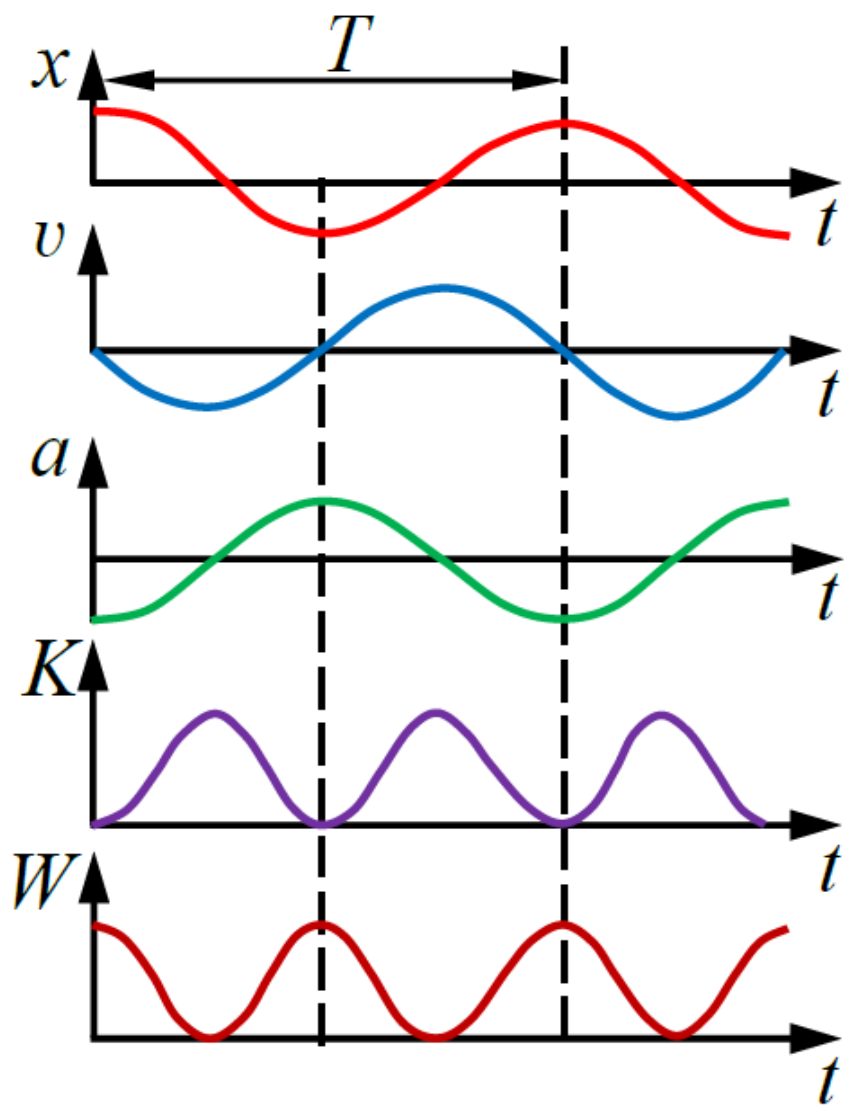
скорость: $v = \dot{x} = -A\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$,

ускорение:

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi).$$

Амплитуды скорости и ускорения равны $A\omega$ и $A\omega^2$.

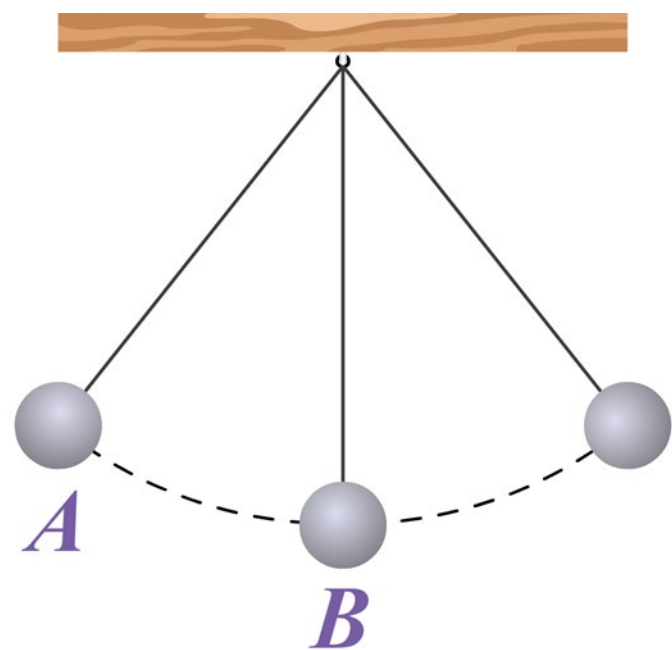
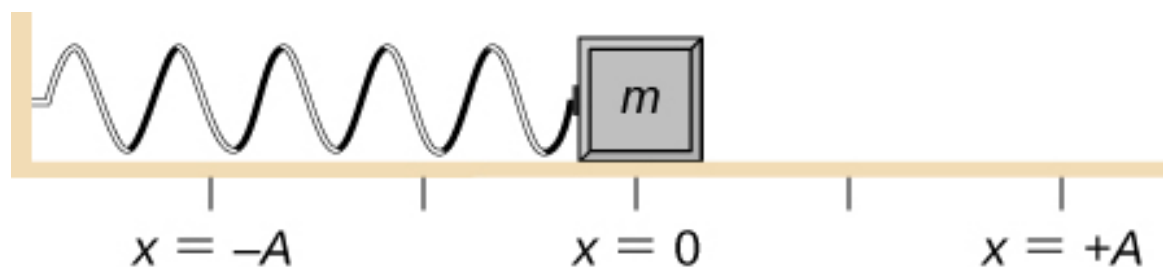
Фаза скорости отличается от фазы смещения на $\frac{\pi}{2}$, а фаза ускорения на π .



Сила, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m , равна

$$F = ma = m \cdot A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi) = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -m\omega^2 x.$$

Таким образом, сила *пропорциональна смещению* материальной точки и *направлена* в сторону, противоположную смещению (к положению равновесия). Такая зависимость от смещения характерна для упругих сил и поэтому силы, которые аналогичным образом зависят от смещения, называются **квазиупругими**.



Энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания

Кинетическая энергия материальной точки

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{mA^2\omega^2}{4} [1 - \cos 2(\omega t + \varphi)].$$

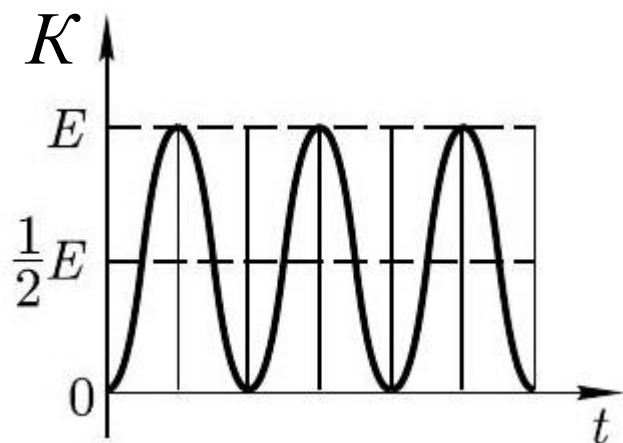
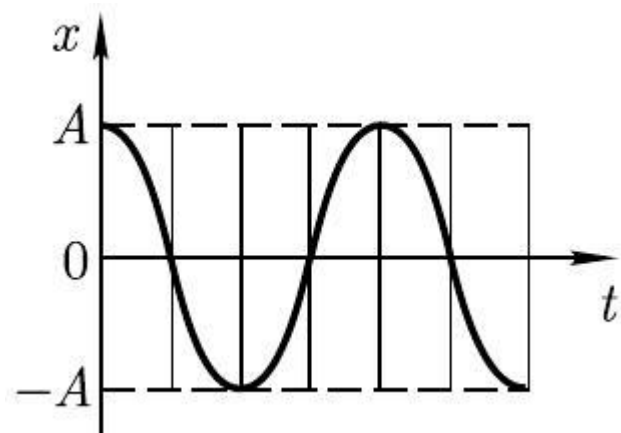
Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием квазиупругой силы:

$$W = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{mA^2\omega^2}{4} [1 + \cos 2(\omega t + \varphi)].$$

Полная энергия

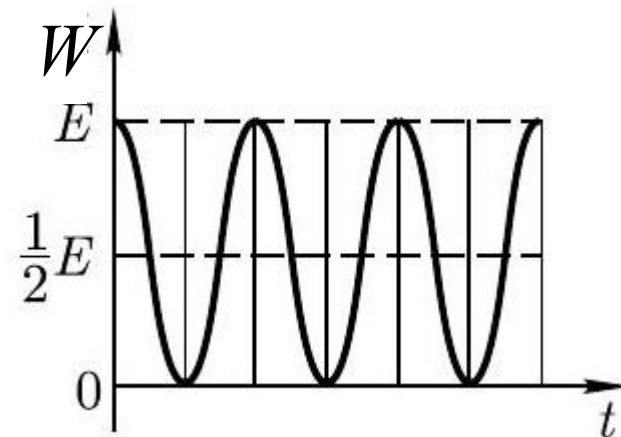
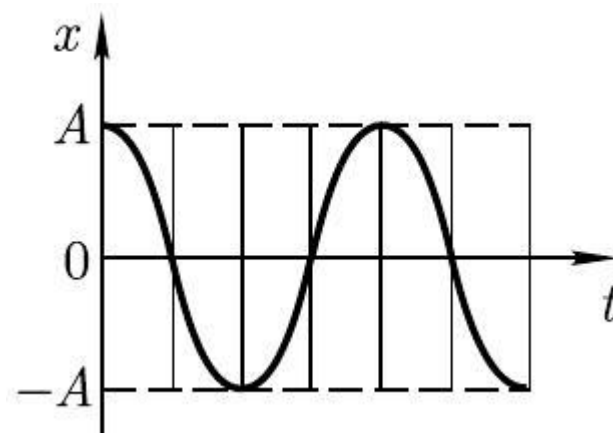
$$E = K + W = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$

остаётся постоянной, с течением времени происходит только превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно.



Кинетическая энергия

$$K = \frac{mA^2\omega^2}{4} [1 - \cos 2(\omega t + \varphi)].$$



Потенциальная энергия

$$W = \frac{mA^2\omega^2}{4} [1 + \cos 2(\omega t + \varphi)].$$