

Лекция 5

02 октября 2026 года

кандидат физико-математических наук,

доцент

ТЕРЕЩЕНКО ГЕОРГИЙ ВИКТОРОВИЧ

gvter@yandex.ru

Соударения

Удар (соударение) – это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.

Центральный удар – это удар, при котором тела до удара движутся по прямой, проходящей через их центры масс.

Абсолютно упругий удар – столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остаётся никаких деформаций, и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию. **Выполняются законы сохранения импульса и сохранения механической энергии.**

https://youtu.be/_0y_J5KqQA8?si=m-8heALhpZ1U2f2F



Обозначим скорости шаров с массами m_1 и m_2 до удара через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, после удара – через $\vec{v}'_1$ и $\vec{v}'_2$. Рассмотрим прямой центральный удар. Законы

сохранения: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m'_1 v'_1 + m_2 v'_2$, $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}$.

Отсюда: $v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$, $v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$.

<https://youtu.be/RWeF1r-Epbw?si=6csrRzt8z4xrCO6D>



Абсолютно неупругий удар – это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое тело.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}, \quad \vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad \text{При } m_1 = m_2 \quad \vec{v} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}.$$

Не выполняется закон сохранения механической энергии: вследствие деформации часть кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию тел (разогрев). Это уменьшение равно:

$$\Delta K = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2.$$

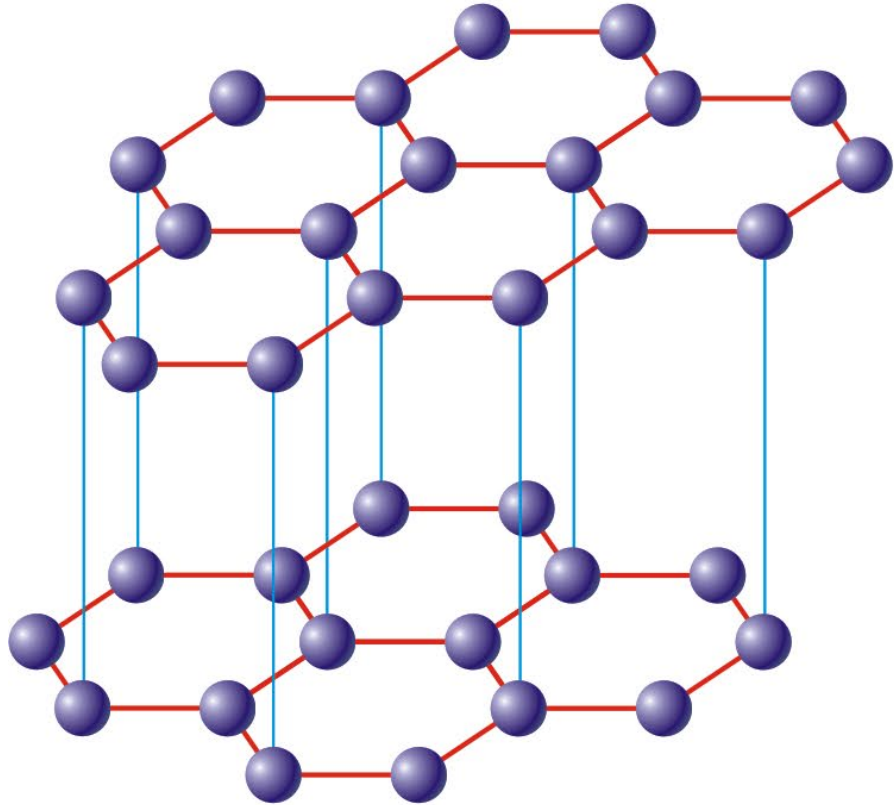
Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($v_2 = 0$), то:

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta K = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad \text{Если } m_2 \gg m_1, \text{ то } v \ll v_1 \text{ и } \Delta K \approx K_1.$$

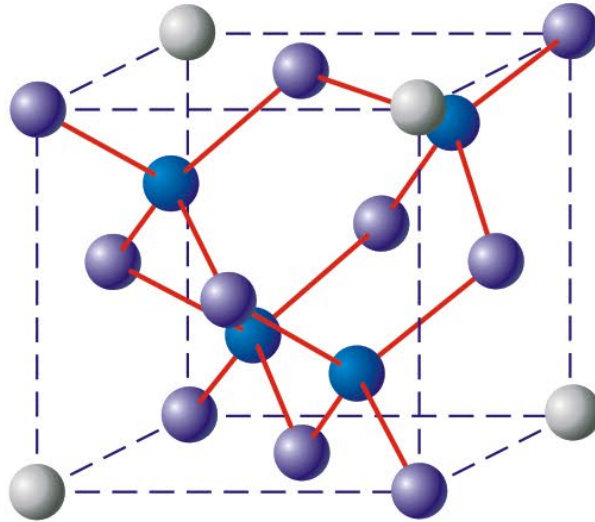


Механика твёрдого тела

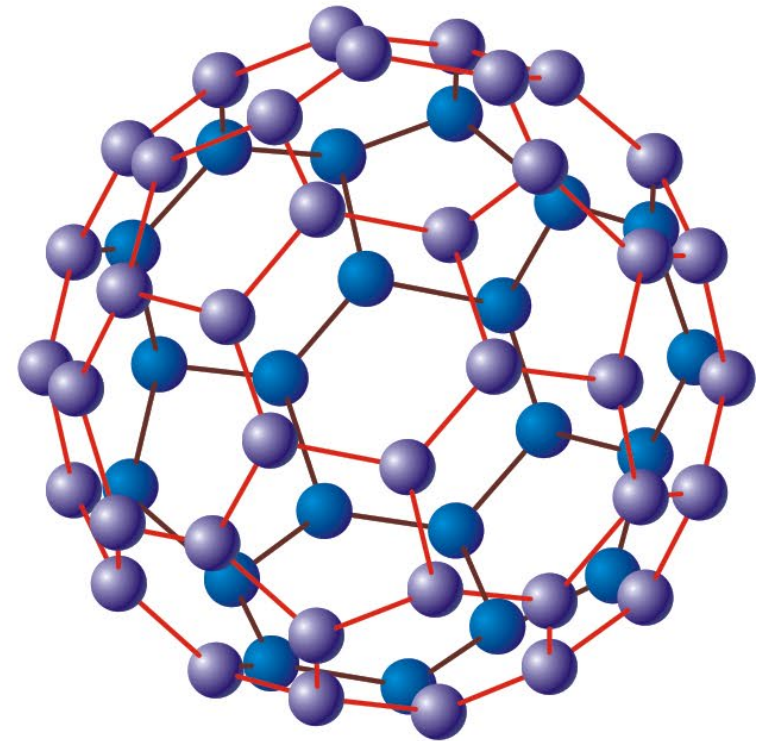
ALLOTROPIC FORMS OF CARBON



graphite

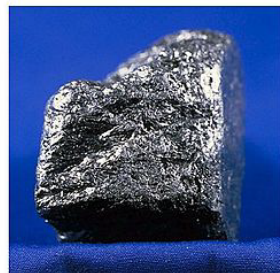


diamond

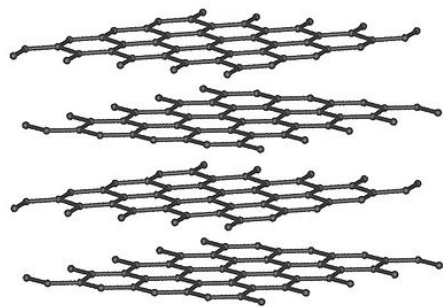
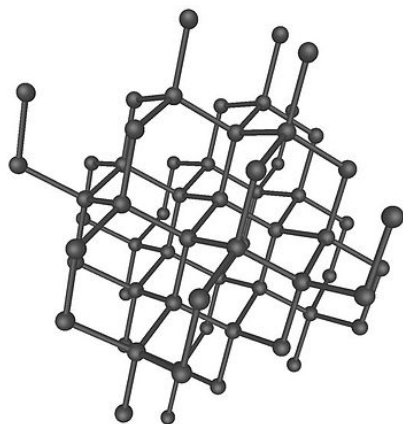


fullerene

Аллотро́пия (от др.-греч. ἄλλος «другой» + τροπός «поворот, свойство») — существование двух и более простых веществ одного и того же химического элемента.



Алмаз и графит — аллотропические формы углерода, различающиеся строением кристаллической решётки



Абсолютно твердым телом называется тело, деформацией которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Расстояние между любыми двумя точками абсолютно твердого тела не изменяется при любых воздействиях.

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, жестко связанных между собой.

Момент инерции

Моментом инерции материальной точки относительно оси вращения называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния от оси.

Моментом инерции системы (тела) относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс n материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси.

$$J_i = m_i r_i^2 .$$
$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 .$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу $J = \int_0^m r^2 dm$, где интегрирование производится по объёму тела.

Главный момент инерции – момент инерции относительно главной оси вращения *проходящей через центр масс*.

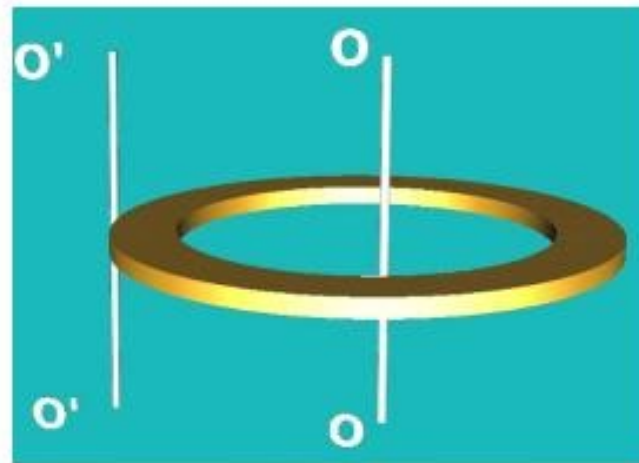
Момент инерции тела зависит от того, относительно какой оси оно вращается и как распределена масса тела по объёму.

Моменты инерции однородных тел массой m , имеющих правильную геометрическую форму и равномерное распределение массы по объёму.

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиуса R	Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$



Якоб Штейнер
(1796 - 1863)



Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Штейнера**:

момент инерции тела J относительно произвольной оси z равен сумме момента его инерции J_C относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния a между осями.

$$J_z = J_C + ma^2$$

Например, момент инерции прямого тонкого стержня длиной l относительно оси, которая перпендикулярна стержню и проходит через его конец (эта ось отстоит на $l/2$ от оси, проходящей через центр стержня):

$$J_z = J_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

Таким образом, величина момента инерции зависит от выбора оси вращения.

Кинетическая энергия вращения

Абсолютно твёрдое тело вращается около неподвижной оси z , проходящей через него. Все точки тела движутся с одинаковой угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Кинетическая энергия тела:

$$K_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси z .

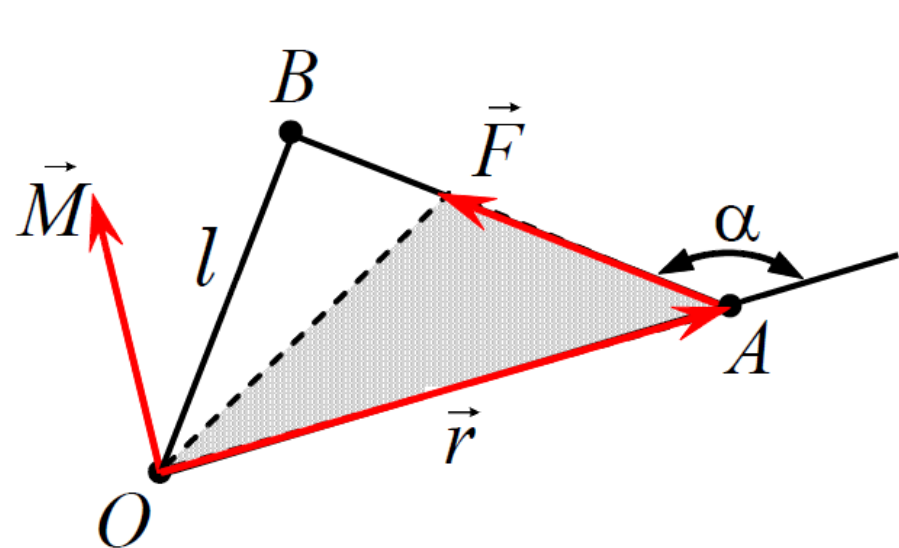
Если тело совершает поступательное и вращательное движения одновременно, то его полная кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий.

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_z \omega^2}{2}.$$

Из сопоставления формул кинетической энергии для поступательного и вращательного движений видно, что **мерой инертности при вращательном движении служит момент инерции тела.**

Момент силы

Моментом силы $\vec{F}$ относительно неподвижной точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-



вектора $\vec{r}$, проведённого из точки O в точку A приложения силы, на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Модуль момента силы: $M = Fr \sin \alpha = Fl$, где $l = r \sin \alpha$ – **плечо силы** – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой O ; α – угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

Моментом силы относительно неподвижной оси z – называется скалярная величина M_z , равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы, определённого относительно произвольной точки O данной оси z . Значение момента не зависит от выбора положения точки O на оси z .

Основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела

При повороте тела под действием силы $\vec{F}$ на бесконечно малый угол $d\varphi$ точка приложения силы A проходит путь $ds = r d\varphi$, и работа равна:

$$dA = F \sin \alpha r d\varphi = M_z d\varphi.$$

Работа вращения тела идёт на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dK = d\left((J_z \omega^2)/2\right) = J_z \omega d\omega.$$

Тогда $M_z d\varphi = J_z \omega d\omega$, или $M_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}$, откуда следует **уравнение**

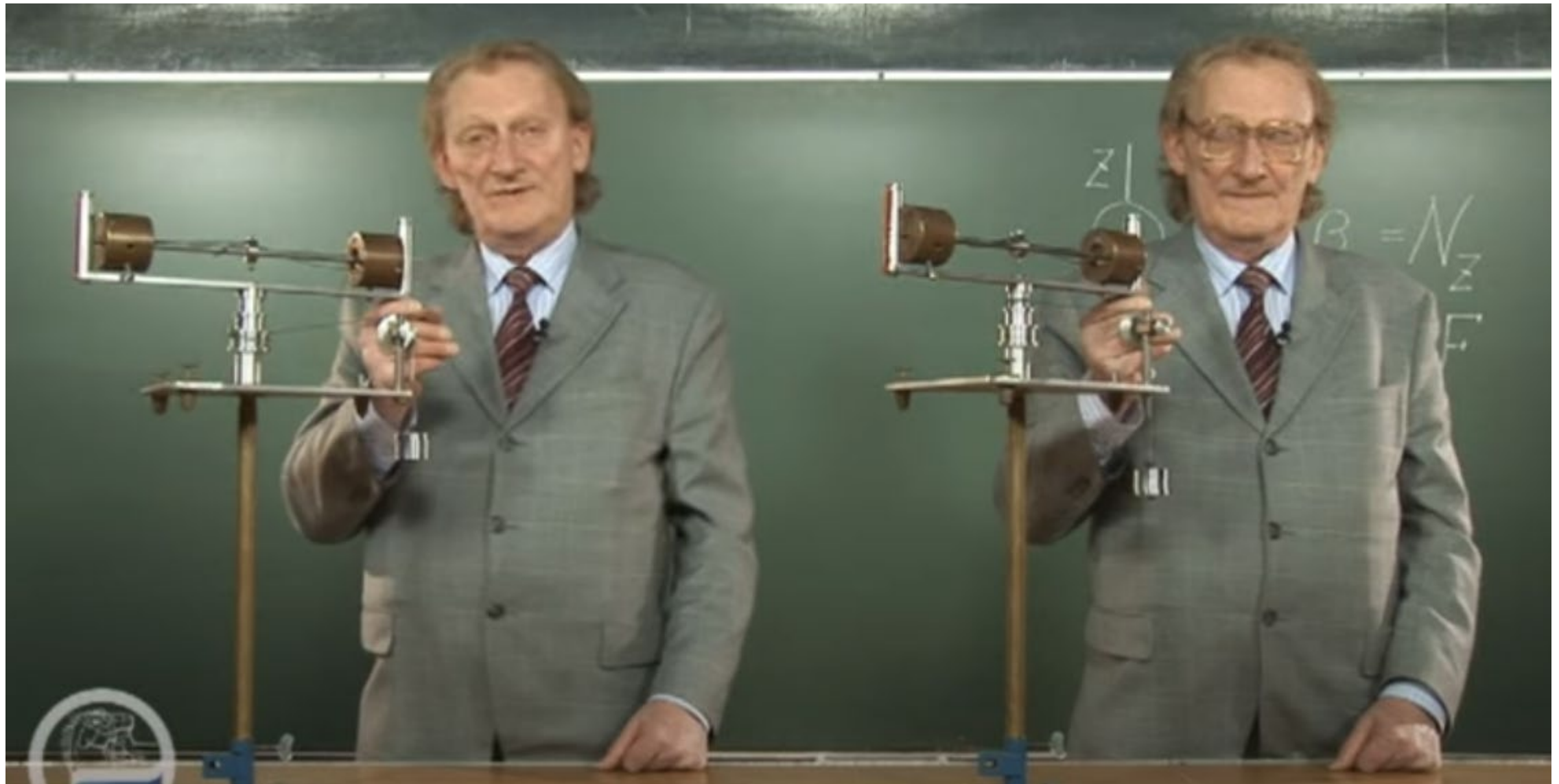
динамики вращательного движения твёрдого тела: $M_z = J_z \cdot \beta$.

Если ось вращения совпадает с главной осью инерции, проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство $\vec{M} = J \cdot \vec{\beta}$, где J – **главный момент инерции тела** (момент инерции относительно главной оси).

$$M_z = J_z \cdot \beta.$$

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\beta}.$$

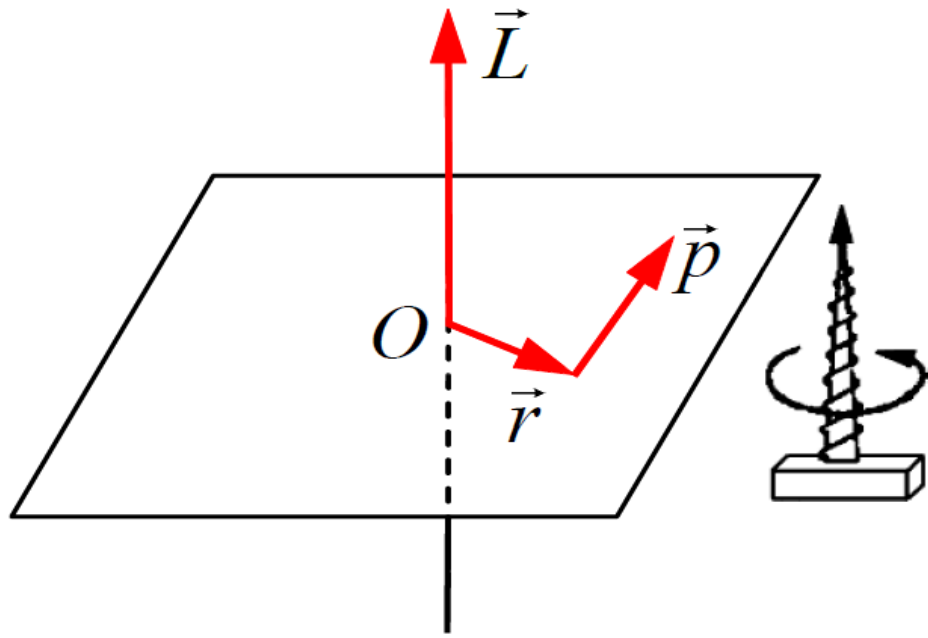
https://youtu.be/3toovcYtKCw?si=k9Xis9zeCxQF_CWZ



Момент импульса и закон его сохранения

Моментом импульса (количества движения) **материальной точки A относительно неподвижной точки O** называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}].$$



Моментом импульса относительно неподвижной оси z называется скалярная величина L_z , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определённого относительно произвольной точки O данной оси. Значение момента импульса L_z не зависит от положения точки O на оси z .

При вращении абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси каждая точка тела движется по окружности постоянного радиуса $\vec{r}_i$ со скоростью $\vec{v}_i$ перпендикулярной радиусу. Момент импульса отдельной частицы равен $L_{iz} = m_i v_i r_i$ и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта (совпадает с направлением вектора угловой скорости $\vec{\omega}$).

Момент импульса твёрдого тела относительно оси есть **сумма моментов импульса отдельных частиц**:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^n m_i \omega r_i^2 = J_z \omega$$

Продифференцируем по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \beta = M_z .$$

В векторной форме: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}}$ – **ещё одна форма уравнения динамики вращательного движения твёрдого тела.**

В замкнутой системе момент внешних сил $\vec{M} = 0$, следовательно, и $\dot{\vec{L}} = 0$.

Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени: $\vec{L} = \text{const}$

Это – фундаментальный закон природы. Он является следствием изотропности пространства: инвариантность физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчёта.

При равномерном вращении твёрдого тела относительно некоторой оси z закон сохранения момента импульса $\vec{L} = \text{const}$ равносильен: $J_z \omega = \text{const}$.

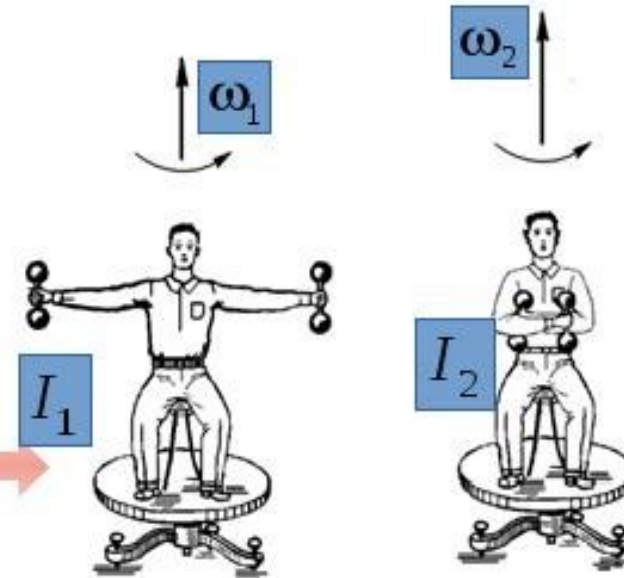
Примеры

- Скамья Жуковского

$$I_1 > I_2 \Rightarrow \omega_1 < \omega_2$$



$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

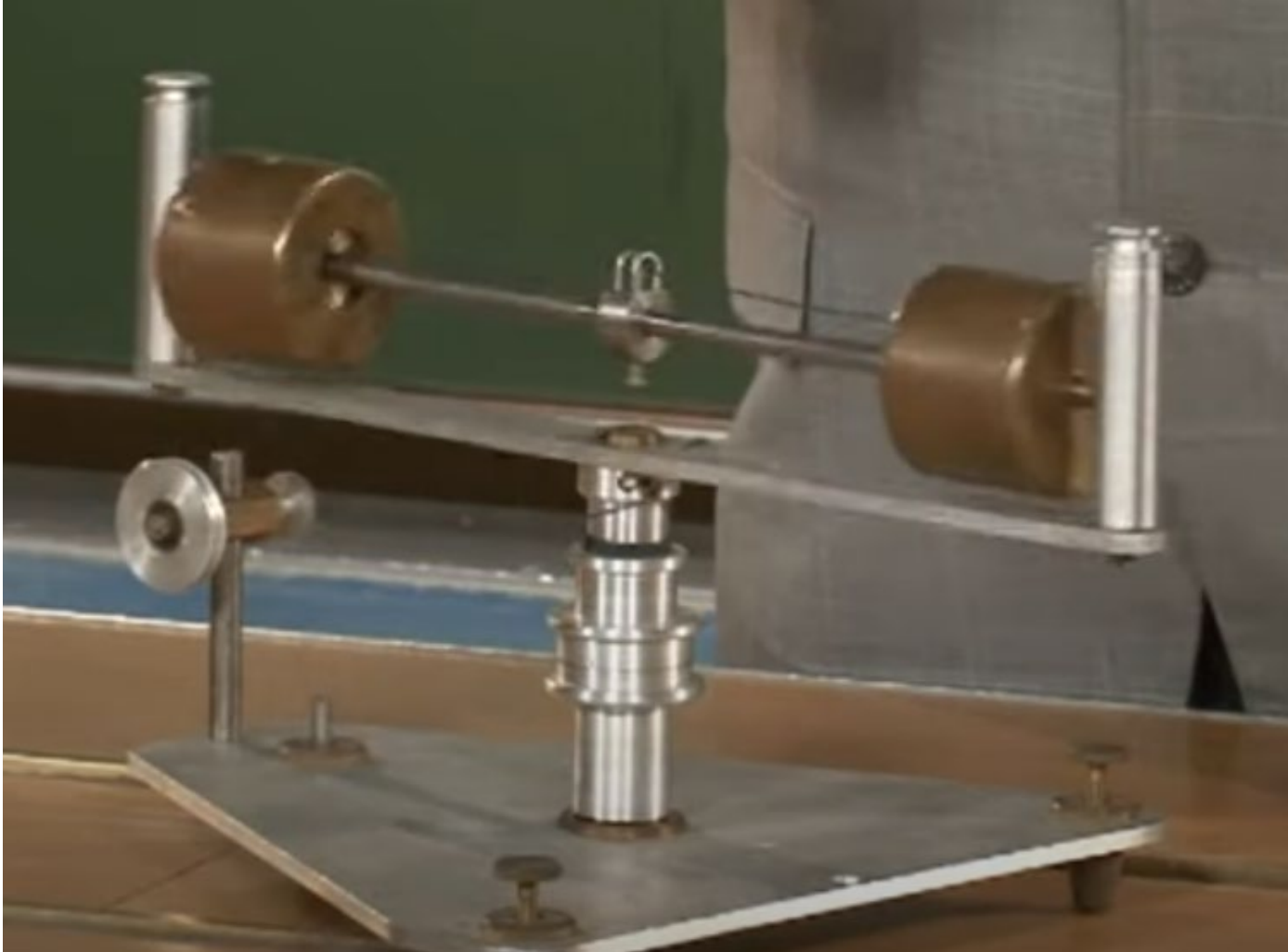


- Фигурное катание на льду

<https://youtu.be/8BB5sWXBKos?si=hw3Qi6ljxwB8U9b9>



<https://youtu.be/CL2K0J77DXc?si=DspN-h4z2NXh1YVr>



Сравнительная таблица основных величин и соотношений для поступательного движения тела и для его вращения вокруг неподвижной оси

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Перемещение	$d\vec{r}$	Угловое перемещение	$d\vec{\phi}$
Скорость	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}}$
Ускорение	$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$	Угловое ускорение	$\vec{\beta} = \dot{\vec{\omega}}$
Сила	$\vec{F}$	Момент силы	$\vec{M}$
Импульс	$\vec{p}$	Момент импульса	$\vec{L}$
Работа	$dA = F_s ds$	Работа	$dA = M_z d\phi$
Кинетическая энергия	$mv^2 / 2$	Кинетическая энергия	$J_z \omega^2 / 2$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a}$	Основное уравнение динамики	$\vec{M} = J \cdot \vec{\beta}$
	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$		$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$