

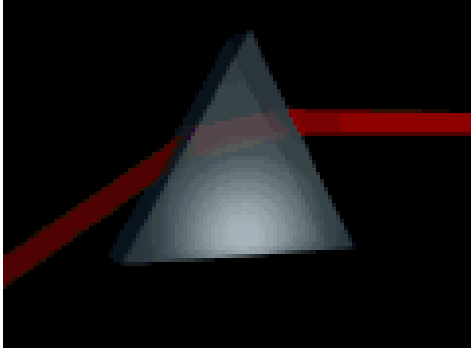
Лекция 5
29 сентября 2026 года

Закономерности в атомных спектрах.

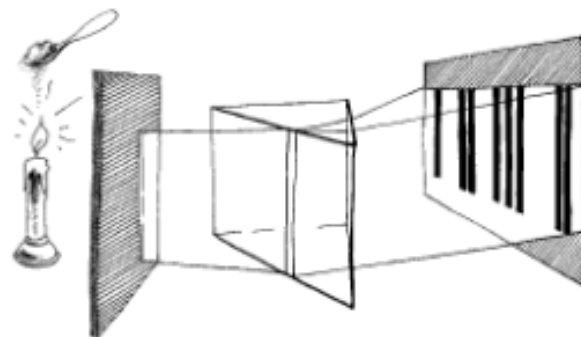
Итак, что же такое атом?

Изолированные атомы в виде разреженного газа или паров металлов испускают спектр, состоящий из отдельных спектральных линий (линейчатый спектр). Изучение атомных спектров послужило **ключом к познанию строения атомов.**

Прежде всего было замечено, что линии в спектрах расположены не беспорядочно, а сериями. Расстояние между линиями в серии закономерно уменьшается по мере перехода от длинных волн к коротким.



СПЕКТРЫ

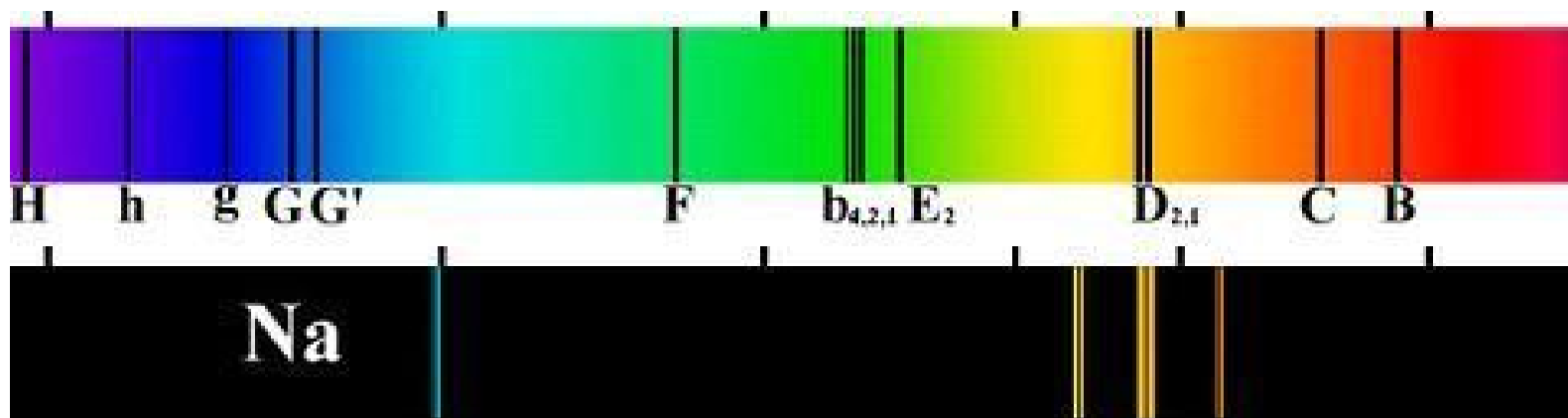


Густав Роберт
Кирхгоф
(12.03.1824-
17.10.1887)



Роберт
Вильгельм Бунзен
(1811-1899)

Опыты Кирхгофа и Бунзена

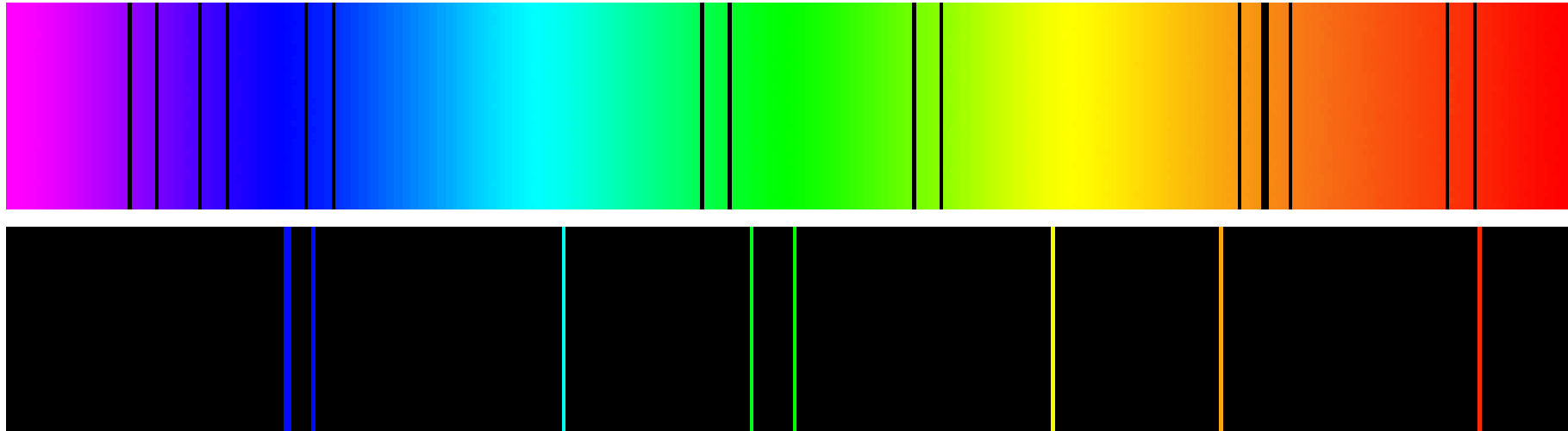


Спектр Солнца и Натрия

Линейчатые спектры испускания и поглощения света.

Спектральные серии

Линейчатые спектры дают все вещества **в газообразном атомарном состоянии**. Изолированные атомы излучают строго определенные длины волн.



Линейчатые спектры в видимой области: Спектр поглощения и спектр излучения.

Линейчатые спектры испускания и поглощения света.

Спектральные серии



Иоганн Бальмер

Бальмер (Balmer) Иоганн Якоб (1825–1898). Швейцарский физик и математик. Родился в Лозанне. Учился в Базеле, Карлсруэ, Берлине.

В 1849 получил степень доктора в Базельском университете. С 1859 преподавал в средней школе, а в 1865–90 – в Базельском университете.

Обнаружил закономерность в спектральных линиях атома водорода, показав в **1885 г.**, что длины волн линий видимой части спектра атома водорода связаны между собой простой **зависимостью (формула Бальмера)**, которая дает возможность определить длины волн всех линий этой водородной **серии (серия Бальмера)**. Это открытие послужило толчком для обнаружения других серий в спектре атома водорода – серий Лаймана, Пашена, Брэкетта и Пфунда. Был пионером в изучении структуры атома.

Линейчатые спектры испускания и поглощения света. Спектральные серии.

Формула Бальмера
(первоначальный вид):

$$\lambda = b \frac{k^2}{k^2 - 4}$$

Линия	λ , Å (измерено Ангстремом)	λ , Å (вычислено Бальмером)	k
<i>C</i>	6562,10	6562,08	3
<i>F</i>	4860,74	4860,8	4
<i>G</i>	4340,1	4340,0	5
<i>H</i>	4101,2	4101,3	6

Бальмер установил, что длины волн серии в видимой части спектра водорода могут быть представлены формулой (**формула Бальмера**):

$$\lambda = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 4}$$

$$\lambda_0 = \text{const}, n = 3, 4, 5, \dots$$

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

или

$$\omega = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$R' = 1,09 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – **постоянная Ридберга**, $n = 3, 4, 5, \dots$

В физике **постоянной Ридберга** называют и другую величину равную $R = R' \cdot 2\pi c$.

$$R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$$

Дальнейшие исследования показали, что **в спектре водорода имеется еще несколько серий**:

Серия Лаймана	$\omega = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 2, 3, 4, \dots$
Серия Бальмера	$\omega = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 3, 4, 5, \dots$
Серия Пашена	$\omega = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 4, 5, 6, \dots$
Серия Брэкета	$\omega = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 5, 6, 7, \dots$
Серия Пфунда	$\omega = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 6, 7, 8, \dots$

Обобщенная *формула Бальмера*

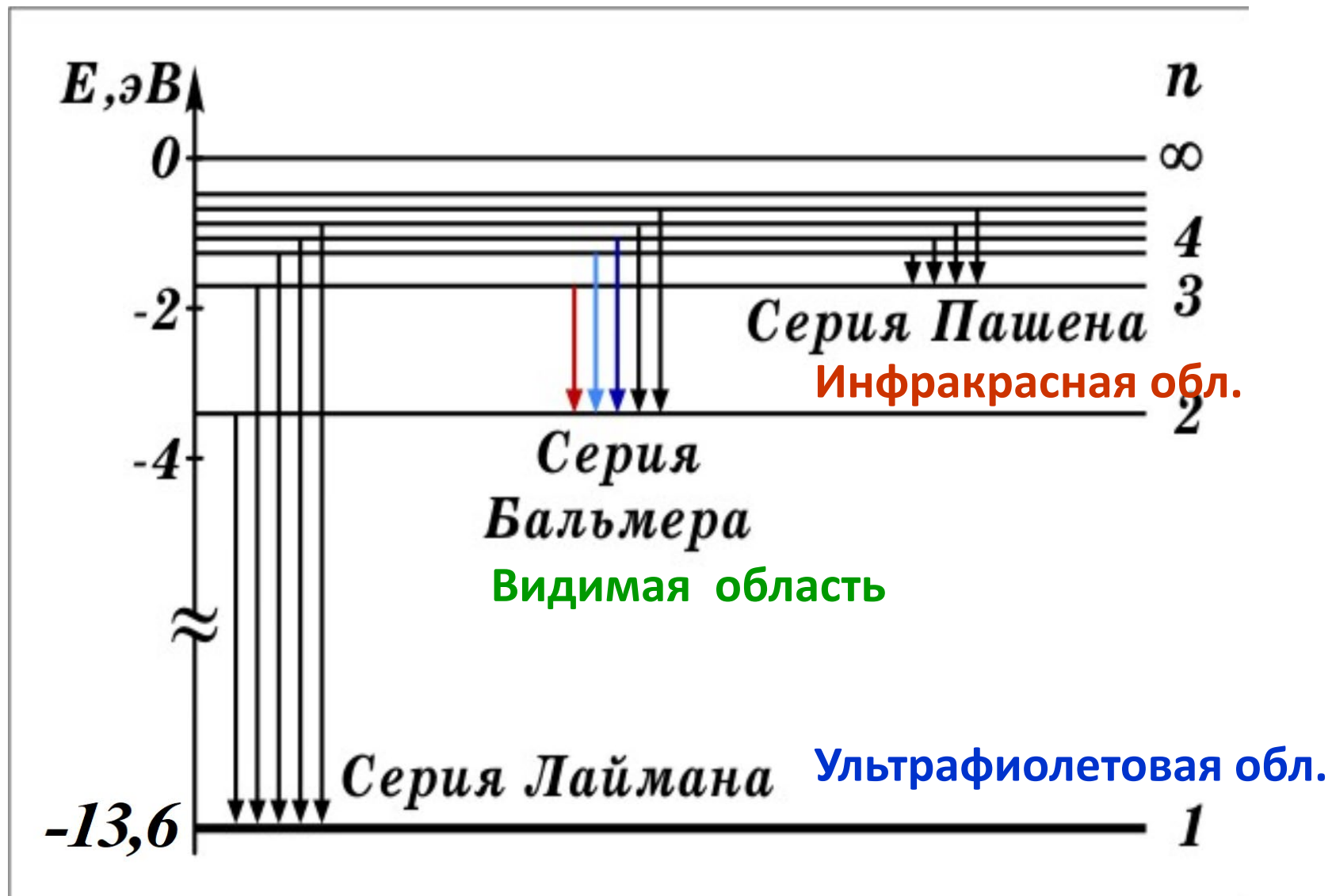
$$\omega = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

или

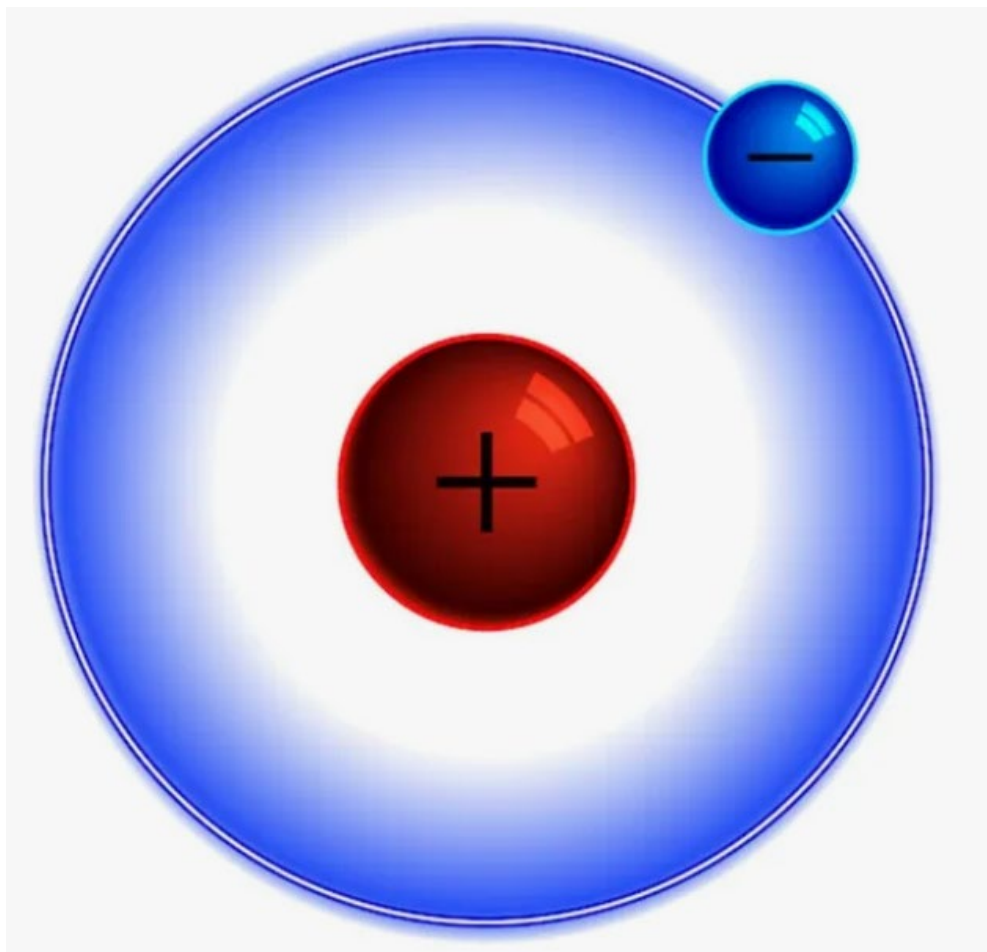
$$\frac{1}{\lambda} = R' \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$, $n = m + 1, m + 2, \dots$

Атом сложная система, имеющая сложный спектр



СПЕКТР АТОМА ВОДОРОДА ПО БОРУ



Рассмотрим движение электрона в водородоподобной системе, ограничиваясь круговыми стационарными орбитами. Второй закон Ньютона

$$\frac{Ze \cdot e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad (\text{другая форма: } \frac{m_e v^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}) \quad \text{и условие квантование}$$

момента импульса: $m_e v r_n = n\hbar$, – позволяют получить **радиус n -й стационарной орбиты электрона**:

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{m_e Ze^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Для водорода ($Z = 1$) радиус первой орбиты электрона (первый боровский радиус):

$$a_0 = r_1 = \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} = 5,28 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$$

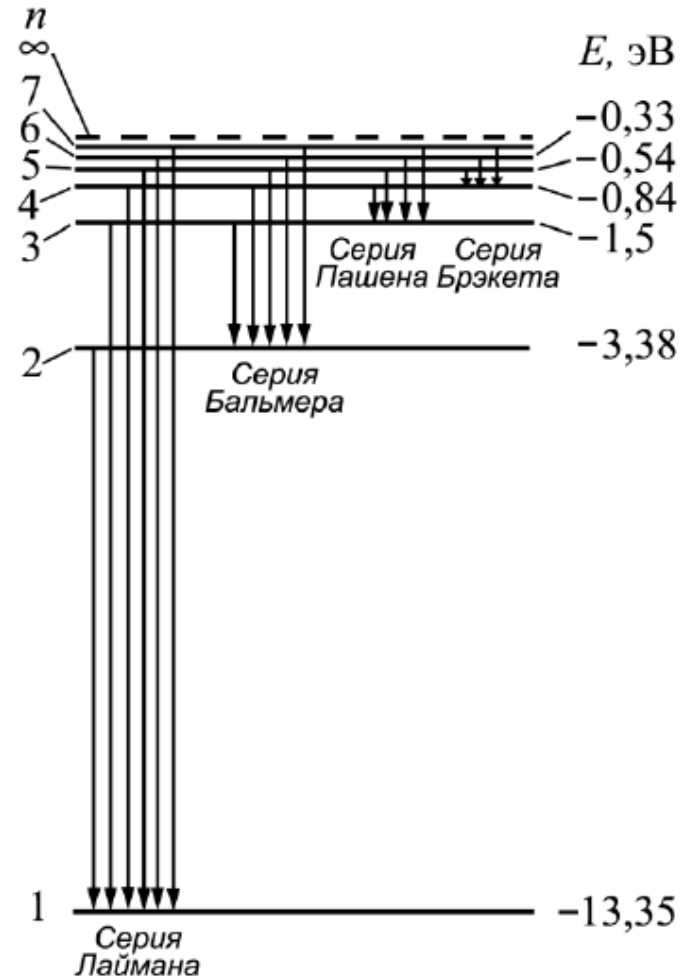
Полная энергия электрона в водородоподобной системе складывается из кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

и, с учётом квантования орбит r_n , получим:

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где знак минус означает, что электрон находится в связанном состоянии.



Целое число n , определяющее энергетические уровни атома, называется **главным квантовым числом**. Энергетический уровень с $n=1$ называется **основным (нормальным) уровнем**, а соответствующее ему состояние атома называется **основным (нормальным) состоянием**. Уровни с $n>1$ и соответствующие им состояния называются **возбуждёнными**.

Придавая n целочисленные значения, получаем для атома водорода энергетические уровни, представленные на рисунке. Минимальная энергия атома водорода $E_1 = -13,55$ эВ. Максимальная энергия $E_\infty = 0$ при $n = \infty$ называется **энергией ионизации** атома (при $E = E_\infty$ происходит отрыв электрона от атома). Переход из стационарного состояния n в стационарное состояние m сопровождается испусканием кванта:

$$h\nu = E_n - E_m = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = hR \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad \text{где } R = \frac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2}.$$

Теоретическое значение R хорошо согласуется со значением постоянной Ридберга, определённым экспериментально.

Историческая роль теории Бора

Несмотря на последующие кризисы, теория Бора стала фундаментом современной физики:

1. Атомная физика: Впервые было введено понятие стационарных состояний и квантовых переходов. Это объяснило, почему атомы излучают свет строго определенных цветов (линейчатые спектры), а не сплошной спектр.
2. Спектроскопия: Теория дала инструмент для расшифровки спектров. Ученые поняли, что каждая линия в спектре соответствует переходу электрона между конкретными уровнями. Это позволило определять состав веществ на расстоянии (спектральный анализ).
3. Химия: Понятие валентности и химической связи получило физическое обоснование через поведение внешних электронов.

Внутренние противоречия теории Бора

Смесь несовместимого: Теория Бора была гибридом.

С одной стороны, она использовала классическую механику (законы Ньютона для движения электрона по орбите, кулоновские силы).

С другой стороны, она вводила квантовые постулаты (правило квантования момента импульса, скачкообразные переходы), которые противоречили классической электродинамике (по которой движущийся с ускорением электрон должен непрерывно излучать и упасть на ядро).

Проблема многоэлектронных атомов: Модель Бора идеально работала для водорода (1 электрон) и ионизированного гелия (1 электрон). Но как только появлялся второй электрон (нейтральный гелий), теория ломалась.

Основные понятия квантовой механики

Корпускулярно-волновой дуализм свойств вещества

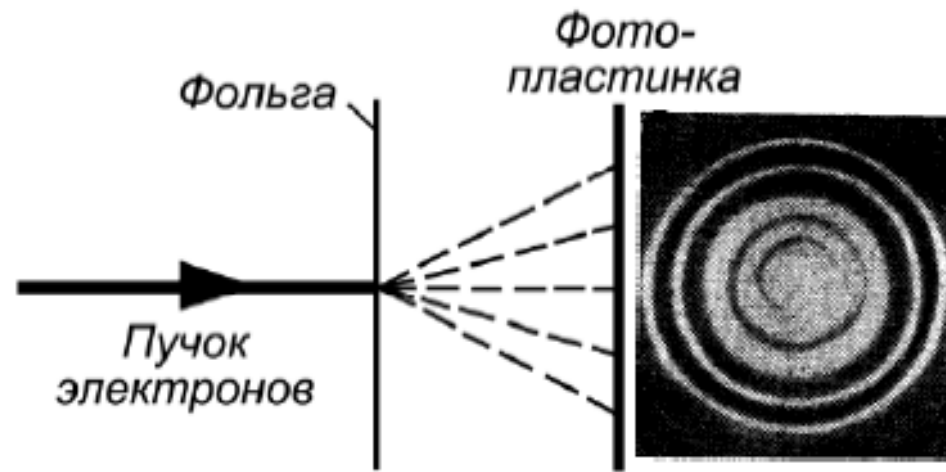
Квантовая механика, созданная для описания свойств квантовых объектов, основывается на *предположении Луи де Бройля* о том, что так же, как свету присущи одновременно свойства частицы (корпускулы) и волны (двойственная корпускулярно-волновая природа света), так и **электроны и любые другие частицы материи наряду с корпускулярными обладают также волновыми свойствами.**

Каждому объекту присущи как корпускулярные характеристики – **энергия E и импульс p** , так и волновые характеристики – **частота ν и длина волны λ .**

Соотношения между корпускулярными и волновыми характеристиками частиц такие же, как для фотонов: $E = h\nu = \hbar\omega$ и $p = \frac{h}{\lambda}$.

Таким образом, *любой частице*, обладающей *импульсом* (в том числе и частице, в отличие от фотона, обладающей массой покоя), *сопоставляется волновой процесс* с длиной волны, определяемой по **формуле де Бройля**:

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$



Гипотеза де Бройля была подтверждена экспериментально в опытах по дифракции электронов на монокристаллах металлов – естественных дифракционных решётках – и на металлических плёнках. Даже в случае чрезвычайно слабых

пучков, когда каждый электрон проходил препятствие независимо от других электронов пучка, формировалась дифракционная картина как в проходящем, так и в отражённом пучке электронов.

Полная энергия частицы определяется частотой волн де Бройля с помощью соотношения:

$$E = h\nu.$$

Таким образом, *корпускулярно-волновой дуализм* – *универсальное свойство материи*.

Это свойство существенным образом проявляется только для **микрообъектов**. Для макроскопических тел длины волн де Бройля исчезающе малы (так, например, частице массой 1 г, движущейся со скоростью 1 м/с, соответствует длина волны де Бройля с $\lambda = 6,62 \cdot 10^{-31}$ м) и волновыми эффектами пренебрегают.

Некоторые свойства волн де Бройля

Рассмотрим свободно движущуюся со скоростью v частицу массой m .

Фазовая скорость волн де Бройля:

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v},$$

т. е. фазовая скорость волн де Бройля **больше** скорости света в вакууме (т. к. $c > v$).

Использованы соотношения: $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

Групповая скорость волн де Бройля:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}.$$

Для свободной частицы $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$, поэтому

$$u = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{\sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}} = \frac{pc^2}{E} = \frac{mvc^2}{mc^2} = v.$$

Групповая скорость волн де Бройля **равна** скорости частицы. Иными словами, **волны де Бройля перемещаются вместе с частицей**.

Для фотона:

$$v_{\text{фаз}} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mc} = c \quad \text{и} \quad u = \frac{pc^2}{E} = \frac{mcc^2}{mc^2} = c .$$

Соотношение неопределённостей

Двойственная корпускулярно-волновая природа микрочастиц определяет ещё одно необычное, с точки зрения классических представлений, свойство микрообъектов – *невозможно одновременно точно определить координату и импульс частицы.*

В самом деле, поскольку каждой частице соответствует волновой процесс, то неопределённость "местоположения" частицы порядка длины волны де Бройля $\Delta x \approx \lambda$ и классическое понятие траектории теряет смысл. Для макроскопических объектов длины волн де Бройля исчезающе малы, поэтому для них применимо понятие траектории движения.

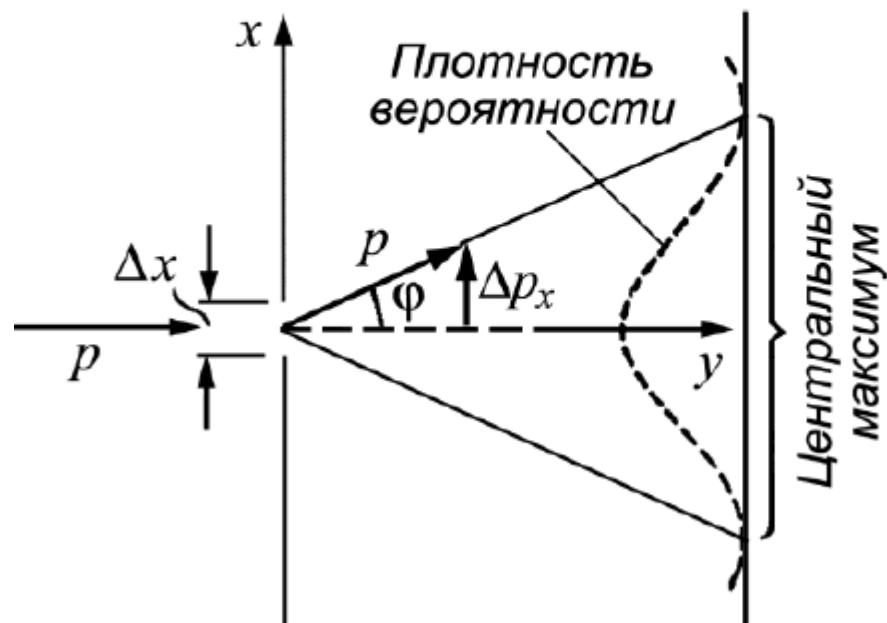
В общем случае это свойство микрообъектов называется **соотношением неопределённостей Гейзенберга**:

Микрочастица не может иметь одновременно определённую координату (x, y, z) и определённую соответствующую проекцию импульса (p_x, p_y, p_z) , причём неопределённости этих величин удовлетворяют соотношениям

$$\Delta x \Delta p_x \geq h, \quad \Delta y \Delta p_y \geq h, \quad \Delta z \Delta p_z \geq h,$$

т. е. *произведение неопределённостей координаты и соответствующей ей проекции импульса не может быть меньше величины порядка h .*

Соотношение неопределённостей проявляется в дифракции частиц. Пусть поток частиц движется вдоль оси Y с импульсом p . **До** прохождения частицы через щель, составляющая её импульса $p_x = 0$, так что $\Delta p_x = 0$, а координата x является совершенно неопределённой.



В момент прохождения частицы через щель неопределённость координаты x частицы становится равной ширине щели Δx . Вследствие дифракции частицы будут двигаться в пределах угла 2φ , где φ – угол, соответствующий первому дифракционному минимуму. Таким образом, неопределённость в значении составляющей вдоль оси x

$\Delta p_x = p \sin \varphi = \frac{h}{\lambda} \sin \varphi$. С другой стороны, $\Delta x \sin \varphi = \lambda$ – условие первого

дифракционного минимума (стр. 6–15). Следовательно $\Delta x \Delta p_x = h$. Поскольку часть частиц попадает за пределы первого дифракционного максимума, то получаем выражение $\Delta x \Delta p_x \geq h$, т. е. соотношение неопределённостей.

Соотношение неопределённостей – это квантовое ограничение применимости классической механики к микрообъектам.

Для микрочастицы *не существует состояний*, в которых её координаты и соответствующие им проекции импульса имели бы **одновременно** точные значения.

Для неопределённости энергии ΔE некоторого состояния системы и промежутка времени Δt , в течение которого это состояние существует, также выполняется соотношение неопределённостей

$$\Delta E \Delta t \geq h.$$

Следовательно, система, имеющая среднее время жизни Δt , не может быть охарактеризована определённым значением энергии; разброс энергии $\Delta E = h/\Delta t$ возрастает с уменьшением времени жизни системы и частота излучённого фотона также должна иметь неопределённость $\Delta \nu = \Delta E/h$, т. е. спектральные линии должны иметь конечную ширину $\delta \nu = \nu \pm \Delta E/h$.

Волновая функция и её свойства

Интенсивность волн де Бройля в данной точке пространства связана с числом частиц, попавших в эту точку, о чем свидетельствуют опыты по дифракции микрочастиц. Поэтому волновые свойства микрочастиц требуют статистического (вероятностного) подхода к их описанию.

Для описания поведения квантовых систем вводится **волновая функция** (другое название – *пси-функция*) $\Psi(x, y, z, t)$. Она определяется таким образом, чтобы вероятность $d w$ того, что частица находится в элементе объёма $d V$, была равна:

$$d w = |\Psi|^2 d V.$$

Физический смысл имеет не сама функция Ψ , а квадрат её модуля $|\Psi|^2 = \Psi \Psi^*$, которым задаётся интенсивность волн де Бройля (здесь Ψ^* – функция, комплексно сопряжённая с Ψ).

Величина $|\Psi|^2$ имеет смысл **плотности вероятности** ρ_w , а сама волновая функция Ψ имеет смысл **амплитуды вероятности**.

Условие нормировки вероятностей получается из того, что вероятность существования частицы где-либо в пространстве равна единице (интеграл вычисляется по всему бесконечному пространству).

Волновая функция, характеризующая вероятность обнаружения действия микрочастицы в элементе объёма, должна быть: **1) конечной** (вероятность не может быть больше единицы), **2) однозначной** (вероятность не может быть неоднозначной величиной) и **3) непрерывной** (вероятность не может изменяться скачком).

$$\rho_w = \frac{dw}{dV} = |\Psi|^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dV = 1$$

Волновая функция позволяет вычислить средние значения физических величин, характеризующих данный микрообъект.

Например, среднее расстояние $\langle r \rangle$ имеет вид:

$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r |\Psi|^2 dV$$

Волновая функция удовлетворяет **принципу суперпозиции**: если система может находиться в различных состояниях, описываемых волновыми функциями $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots$, то она также может находиться в состоянии, описываемом линейной комбинацией этих функций (где C_n ($n = 1, 2, \dots$) – произвольные, вообще говоря, комплексные числа).

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n$$

Сложение *волновых функций* (амплитуд вероятностей), а не *вероятностей* (определяемых квадратами модулей волновых функций) принципиально отличает квантовую теорию от классической статистической теории, в которой для независимых событий справедлива *теорема сложения вероятностей*.

Общее уравнение Шредингера

Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x, y, z, t) \cdot \Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; m – масса частицы; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

$i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; $U(x, y, z, t)$ – потенциальная функция частицы в силовом поле, в котором она движется; $\Psi(x, y, z, t)$ – искомая волновая функция частицы.

Уравнение дополняется условиями, накладываемыми на волновую функцию: (1) волновая функция должна быть конечной, однозначной и непрерывной; (2) производные $\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \frac{\partial\Psi}{\partial t}$ должны быть непрерывны;

(3) функция $|\Psi|^2$ должна быть интегрируема (это условие в простейших случаях сводится к условию нормировки вероятностей).

Уравнение Шредингера для стационарных состояний

Важным частным случаем общего уравнения Шредингера, является **уравнение Шредингера для стационарных состояний**, в котором *исключена зависимость Ψ от времени*, и поэтому **значения энергии** этих состояний являются **фиксированными** (не изменяются со временем).

В этом случае силовое поле, в котором движется частица, **стационарно**, т. е. функция $U = U(x, y, z)$ не зависит явно от времени и имеет *смысл потенциальной энергии*. Решение уравнения может быть представлено в виде произведения двух функций – функции *только координат* и функции *только времени*: $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \cdot \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right)$, где E – полная энергия частицы.

Уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right) \cdot \Delta \psi + U \cdot \psi \cdot \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right) = i\hbar \left(-i \frac{E}{\hbar}\right) \cdot \psi \cdot \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right)$$

после упрощений приобретает вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = E\psi \quad \text{или} \quad \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

– уравнение Шредингера для стационарных состояний.

Физический смысл имеют только **регулярные** волновые функции – конечные, однозначные и непрерывные вместе со своими первыми производными. Эти условия выполняются только при определённом наборе E . Эти **значения энергии** называются **собственными**. Решения, которые соответствуют собственным значениям энергии, называются **собственными функциями**. Собственные значения E могут образовывать как непрерывный, так и дискретный ряд. В первом случае говорят о **непрерывном** (или **сплошном**) **спектре**, во втором – о **дискретном спектре**.

Движение свободной частицы

Для свободной частицы $U(x) = 0$ (пусть она движется вдоль оси x).

Решением уравнения Шредингера
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$$

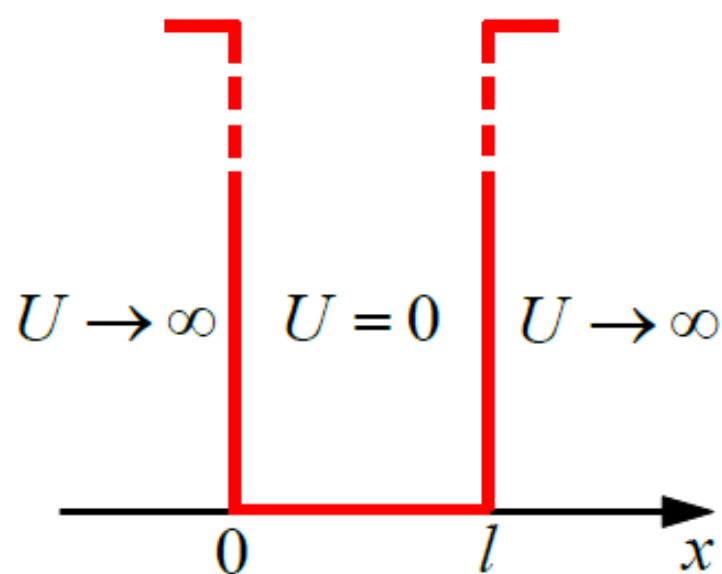
будет функция
$$\Psi(x, t) = A \exp(-i\omega t + ikx) = A \exp\left(-\frac{i(Et - p_x x)}{\hbar}\right),$$

где $A = \text{const}$; $\omega = \frac{E}{\hbar}$; $k = \frac{p_x}{\hbar}$ – волновое число – может принимать любые

положительные значения; $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m}$ – **непрерывный** спектр энергий.

Таким образом, свободная квантовая частица описывается плоской монохроматической волной де Бройля. Этому соответствует не зависящая от времени плотность вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^* = |A|^2$, т. е. все положения свободной частицы в пространстве являются равновероятными.

Частица в одномерной прямоугольной "потенциальной яме" с бесконечно высокими "стенками"



Рассмотрим одномерную "потенциальную яму":

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq l \\ \infty, & x > l \end{cases}$$

где l – ширина "ямы", а энергия отсчитывается от ее дна.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний в пределах ямы:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0, \quad \text{где} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

За пределы "ямы" частица не проникает, поэтому волновая функция вне "ямы" равна нулю, следовательно, на границах "ямы" непрерывная волновая функция также должна обращаться в нуль $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Этим граничным условиям удовлетворяет решение уравнения Шредингера $\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$ при $B = 0$ и $k = \frac{n\pi}{l}$. Поскольку $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, то:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) - \text{собственные значения энергии.}$$

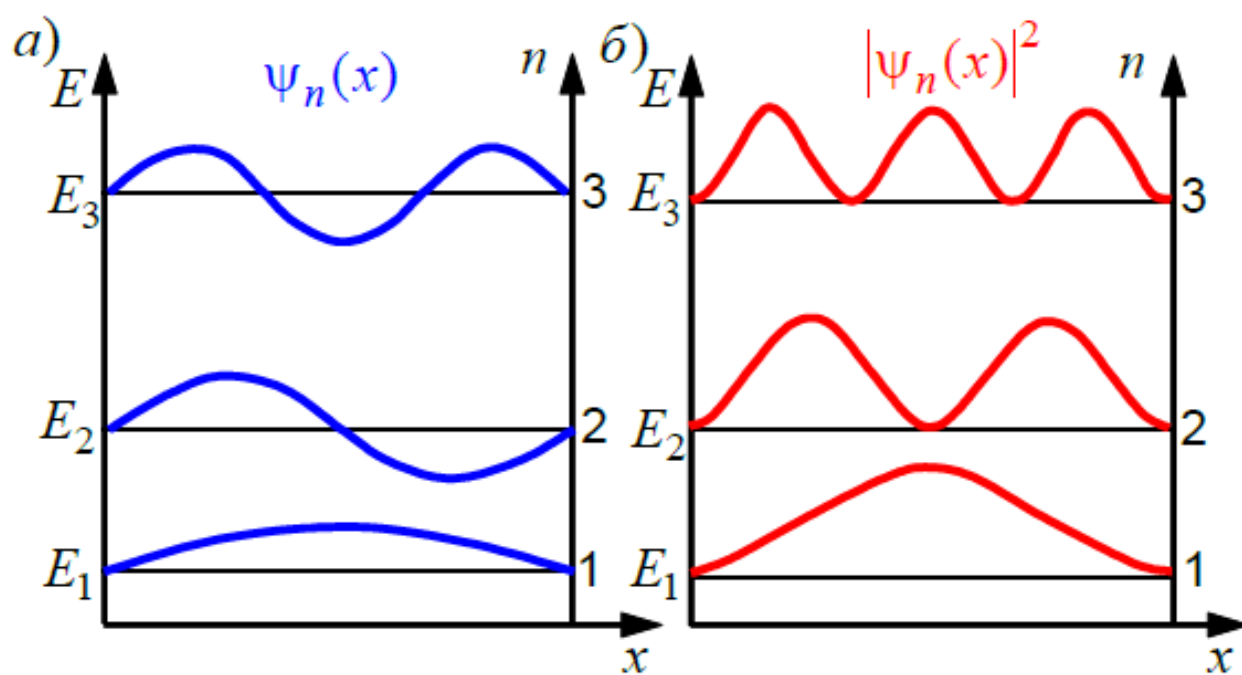
Минимально возможное значение энергии: $E_{\min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}$.

Таким образом, энергия частицы в бесконечно высокой потенциальной "яме" принимает лишь определённые *дискретные* значения, т. е. **квантуется**.

Квантованные значения энергии E_n называются **уровнями энергии**, а число n , определяющее энергетические уровни частицы, называется **главным квантовым числом**.

Собственные волновые функции $\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi}{l} x$, с учётом

нормировки $\int_0^l \psi_n^2(x) dx = A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = 1$, будут иметь вид:



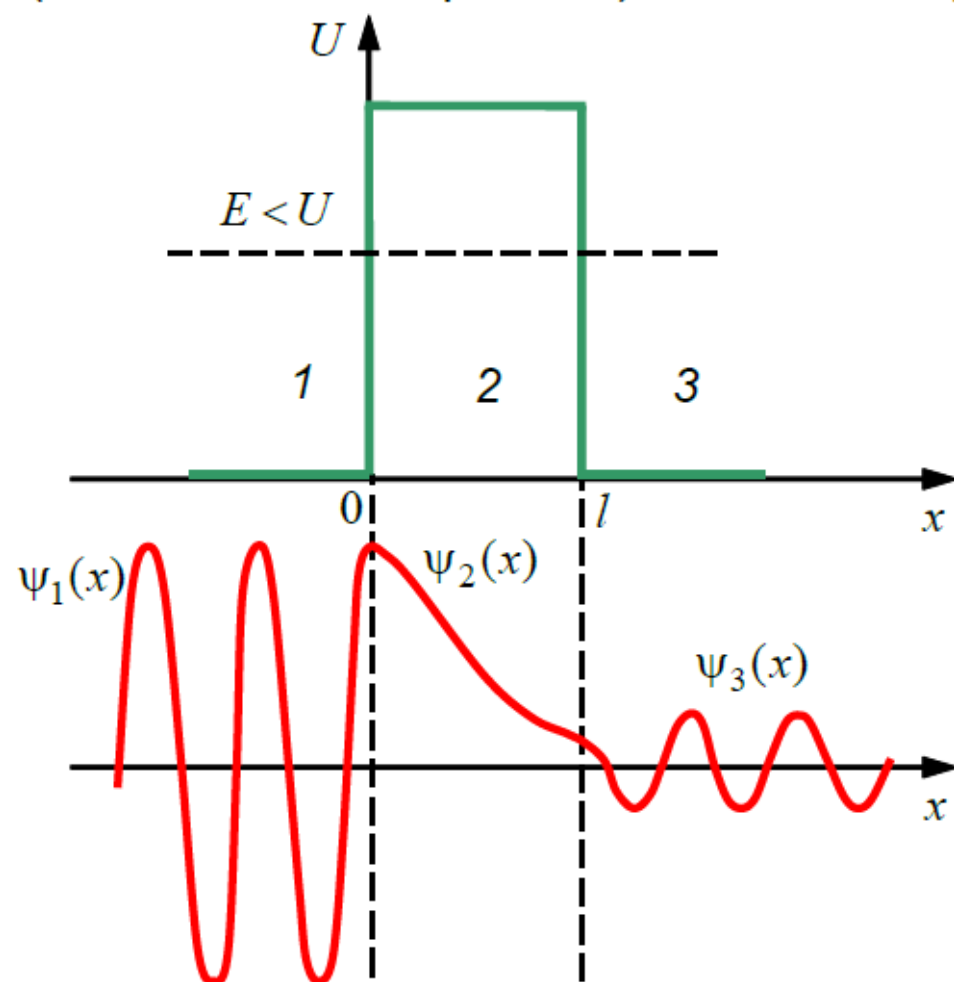
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

На рисунке изображены графики собственных функций (а) и плотность вероятности (б) обнаружения частицы на разных расстояниях от "стенок" ямы, определяемая выражением:

$$|\psi_n(x)|^2 = \psi_n(x) \psi_n^*(x).$$

Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект

Рассмотрим простейший потенциальный барьер прямоугольной формы (высота U и ширина l) для одномерного движения частицы:



$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 & (\text{область 1}) \\ U, & 0 \leq x \leq l & (\text{область 2}) \\ 0, & x > l & (\text{область 3}) \end{cases}$$

Вид волновых функций, являющихся решениями уравнения Шредингера для областей 1, 2 и 3 (см. рисунок и таблицу) свидетельствует о том, что:

1) **В области 1** волновая функция представляет собой сумму двух плоских волн – движущейся в сторону барьера и отражённой от барьера.

2) **В области 2** в случае $E < U$:

$$q = i\beta, \quad \text{где } \beta = \frac{\sqrt{2m(U - E)}}{\hbar}.$$

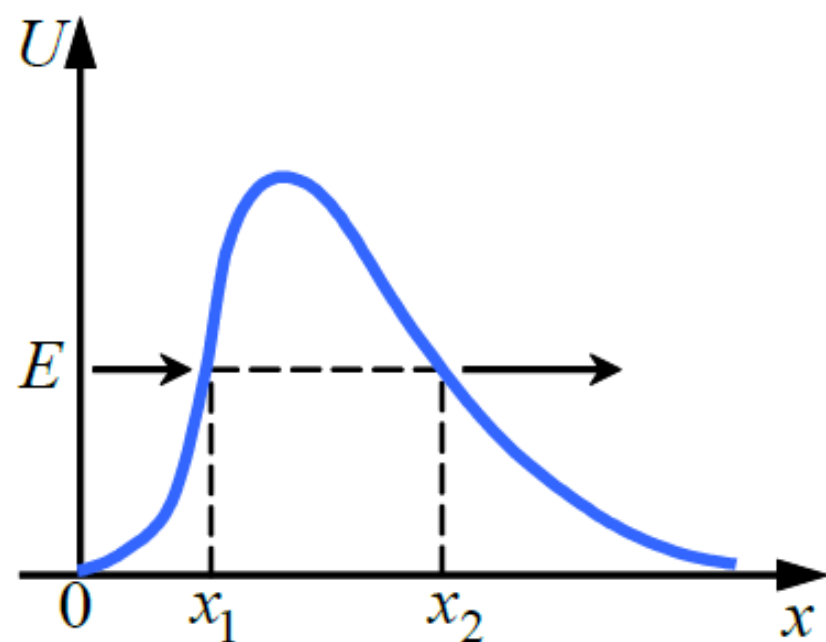
3) В области 3 имеется только волна, прошедшая через барьер ($B_3 = 0$), которая имеет вид волн де Бройля с той же длиной волны, но меньшей амплитудой.

Об- ласть	Уравнение Шредингера	Общее решение	Решение при $E < U$
1	$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k^2 \psi_1 = 0,$	$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$	$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$
2	$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + q^2 \psi_2 = 0,$	$\psi_2(x) = A_2 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx}$	$\psi_2(x) = A_2 e^{-\beta x} + B_2 e^{\beta x}$
3	$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k^2 \psi_2 = 0,$	$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}$	$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx}$

Здесь $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $q^2 = \frac{2m(E - U)}{\hbar^2}$.

Таким образом, квантовая механика приводит к принципиально новому специфическому квантовому явлению, получившему название **туннельного эффекта**, в результате которого микрообъект может "пройти" сквозь потенциальный барьер.

Для описания туннельного эффекта используют понятие **коэффициента прозрачности** D потенциального барьера, определяемого как отношение квадратов модулей прошедшей и падающей волны. Для случая **прямоугольного** потенциального барьера:



$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = D_0 \exp\left(-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)}\right).$$

Для потенциального барьера произвольной формы:

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[U(x) - E]} dx\right).$$

Прохождение частицы сквозь область, в которую, согласно законам классической механики, она не может проникнуть, можно пояснить *соотношением неопределённостей*. Неопределённость импульса Δp на отрезке $\Delta x = l$ составляет $\Delta p > h/l$. Связанная с этим разбросом в значениях импульса кинетическая энергия $\frac{(\Delta p)^2}{2m}$ может оказаться достаточной для того, чтобы полная энергия частицы оказалась больше потенциальной.