

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Ю. А. Новикова, Г. В. Терещенко

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКОВ

Лабораторный практикум



Санкт-Петербург
2023

УДК 531.535
ББК 22.213
Н73

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *В. Г. Фарафонов*;
доктор физико-математических наук, профессор *В. А. Полищук*

Утверждено

редакционно-издательским советом университета
в качестве лабораторного практикума

Протокол № 3 от 15 мая 2023 г.

Новикова, Ю. А.

Н73 Кинематика и динамика движения маятников: лабораторный практикум / Ю. А. Новикова, Г. В. Терещенко. – СПб.: ГУАП, 2023. – 73 с.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с ФГОС+++ и предназначено для студентов ГУАП всех технических направлений. В учебно-методическом пособии излагается материал, необходимый для выполнения лабораторных работ по физике по разделу «Механические колебания».

УДК 531.535
ББК 22.213

© Санкт-Петербургский государственный
университет аэрокосмического
приборостроения, 2023

ВВЕДЕНИЕ

Среди явлений природы мы часто наблюдаем периодические процессы: приливы и отливы в море, смена дня и ночи, вращение Луны вокруг Земли, движение планет Солнечной системы. Так же в быту и технике: колебания маятника часов, вращение и движение частей разнообразных машин – все это периодические явления.

В периодическом явлении изменение какой-либо величины повторяется в том же виде через совершенно определенное время – период T . Можно дать математическое определение периодической величины: если $f(t)$ есть периодическая функция t с периодом T , то при любом t функция $f(t + T) = f(t)$.

График периодически изменяющейся величины повторяется в точности через период (рис. В1).

Довольно часто мы встречаем непериодические явления, которые похожи на периодические движения; например, маятниковые колебания грузика, подвешенного на нити, колебания ветки дерева после того, как ее оттянут вниз, и т. д. Во всех этих явлениях процессы не будут периодическими, колебания будут постепенно убывать по величине. Все такие процессы и аналогичные им называют более общим термином – колебания, а периодические колебания представляют частный случай колебаний вообще.

Если колебания передаются от одной частицы к другой, как, например, колебания уровня воды, возникшие после падения камешка, передаются соседним частицам воды, то совокупность таких колебаний всех частиц называется волновым процессом.

Среди разнообразных колебаний, встречающихся в природе, основную и очень важную роль играют гармонические колебания.

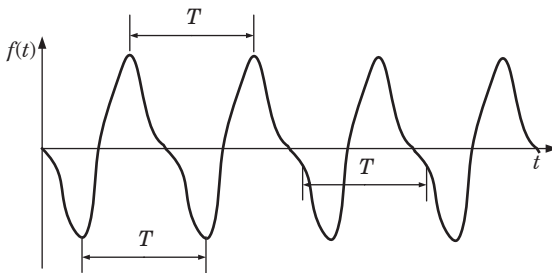


Рис. В1. График периодически изменяющейся величины

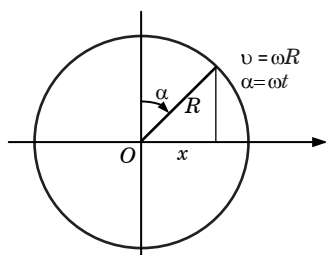


Рис. В2. Движение точки по окружности

Гармонические колебания представляют собой периодический процесс, в котором изменение наблюдаемой величины происходит по закону синуса (или косинуса). Например, проекция точки, движущейся равномерно по окружности, на линию, лежащую в плоскости движения точки (рис. В2), изменяется со временем по синусоидальному закону.

Если окружность имеет радиус R и угловая скорость вращения точки ω , то проекция x равна

$$x = R \sin \alpha = R \sin(\omega t).$$

Период изменения x , очевидно, равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Через время T , время одного оборота точки, весь процесс в точности повторится. Поэтому T называют периодом гармонических колебаний, а ω – круговой (или циклической) частотой гармонических колебаний. Число колебаний за единицу времени называют частотой колебаний,

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Частоту ν измеряют в герцах, размерность $[\text{Гц}] = 1/\text{с}$. Если тело совершает N колебаний в секунду, то частота его колебаний $\nu = N$ Гц.

Гармоническое движение часто встречается там, где имеет место равномерное вращательное движение. Но, например, движение поршня двигателя внутреннего сгорания при равномерном вращении маховика не представляет собой чисто гармоническое движение, эти периодические движения будут близкими к гармоническим только при определенных условиях.

В данной лабораторном практикуме Вы познакомитесь с законами, описывающими колебания различных механических систем.

Для выполнения лабораторных работ используются комплекты специализированного лабораторного оборудования «Механика – 1», «Закон сохранения механической энергии, маятник Максвелла» и «Физический и математический маятники», изготовленные Производственным Объединением «Зарница».

Выполнение лабораторной работы осуществляется по следующему плану:

1. Изучение теоретического материала и ознакомление с лабораторной установкой. Помимо базового теоретического материала студент знакомится со знаниями, изложенными в учебниках. Рекомендуемый список литературы находится в конце данного лабораторного практикума.

2. Получение допуска к лабораторной работе у преподавателя. В процессе получения допуска выявляется степень готовности студента к выполнению лабораторной работы.

3. Проведение физического эксперимента на лабораторной установке с фиксацией результатов в протоколе измерений. Протокол измерений обязательно необходимо подписать у преподавателя.

4. Оформление отчета по лабораторной работе. Отчет выполняется на листах формата А4, согласно ГОСТ 7.32-2017 и ГОСТ Р 2.105-2019 в рукописной форме. Печать на принтере можно, только титульный лист отчета и бланк протокола измерений.

5. Защита отчета у преподавателя. На данном этапе проверяется качество, полученных практических результатов и уровня теоретических знаний студента.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛ И ПРОВЕРКА ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Цель работы. Изучение законов динамики вращательного движения твердого тела на примере маятника Максвелла и определение момента инерции.

1. Описание лабораторной установки

Конструктивно установка (рис. 1.1) представляет собой основание 1 на регулируемых ножках, на поверхности которого закреплена стойка 2.

На стойке закреплен кронштейн 3 с оптическим датчиком 4. В верхней части стойки закреплен кронштейн с винтами регули-

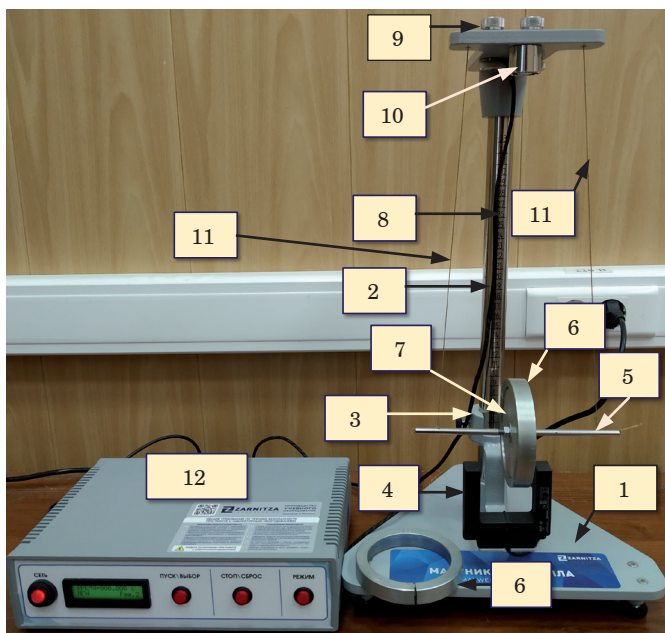
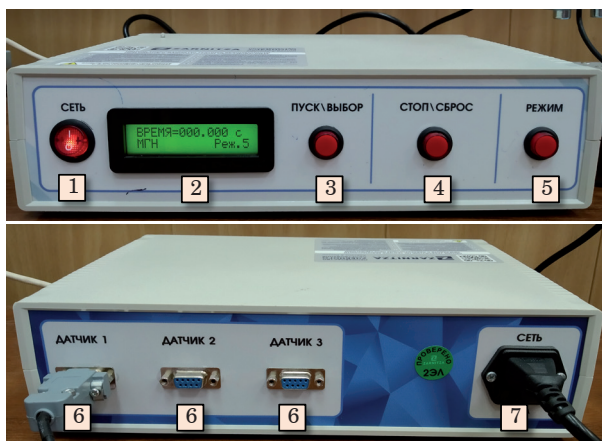


Рис. 1.1. Конструкция лабораторной установки: 1 – основание; 2 – стойка; 3 – кронштейн; 4 – оптический датчик; 5 – ось маятника Максвелла; 6 – кольца с разной массой; 7 – диск маятника; 8 – шкала; 9 – винты для регулировки длин нитей; 10 – электромагнит; 11 – нити; 12 – универсальный электронно-измерительный блок (УЭИБ)



*Рис. 1.2. Конструкция универсального электронно-измерительного блока:
 1 – кнопка включения универсального электронно-измерительного блока;
 2 – жидкокристаллический дисплей, 3 – кнопка ПУСК\ВЫБОР;
 4 – кнопка СТОП\СБРОС; 5 – кнопка выбора режимов работы;
 6 – разъемы для подключения датчиков;
 7 – разъем подключения к сети переменного тока 220В 50 Гц*

ровки длины нитей 9, на которой расположен электромагнит 10. Электромагнит предназначен для фиксации кольца 6 в начальный момент времени. Кольцо 6 устанавливается на диск 7, закрепленный на оси 5, к концам которой привязана нить 11. В комплект поставки входит два кольца различные по массе. Масса сменных колец: 250 г. и 330 г. Масса диска 100 г.

Оптический датчик 4 и электромагнит 10 соединены с универсальным электронно-измерительным блоком (12, рис. 1.1). На задней панели универсального электронно-измерительного блока расположены разъемы (6, рис. 1.2), к которым посредством кабеля подсоединяется оптический датчик и электромагнит.

Включение УЭИБ (рис. 1.2) осуществляется выключателем питания «СЕТЬ» 1. Наличие питающего напряжения индицирует лампа подсветки выключателя. Кнопкой «РЕЖИМ» выбирается текущий режим работы УЭИБ. Основной режим работы – № 2. Кнопкой «СТОП\СБРОС» происходит фиксация груза маятника в необходимом положении. Кнопкой «ПУСК\ВЫБОР» происходит отпускание электромагнита и соответственно движение маятника.

Питание установки осуществляется от сети переменного тока 220В, 50Гц.

2. Теоретические сведения

Маятник Максвелла представляет собой диск, закрепленный на горизонтальной оси и подвешенный бифилярным способом. На диск надеваются кольца для того, чтобы можно было менять общую массу маятника, и, следовательно, *момент инерции маятника*.

Маятник удерживается в верхнем положении электромагнитом. При выключении электромагнита маятник Максвелла, вращаясь вокруг горизонтальной оси, опускается вертикально вниз с ускорением.

При этом выполняется закон сохранения энергии, т. е. потенциальная энергия поднятого маятника переходит в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения.

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad (1.1)$$

где $m = m_0 + m_d + m_k$ – масса маятника Максвелла; m_0 – масса оси маятника; m_d – масса диска; m_k – масса кольца.

Полученное выражение можно использовать для определения момента инерции маятника J .

2.1. Определение момента инерции маятника

Из уравнения (1.1) определим момент инерции маятника. Для этого выразим величины v и ω через высоту подъема маятника h . Поступательное движение маятника вниз является равноускоренным с начальной скоростью $v = 0$ и ускорением a . Из уравнения кинематики:

$$h = v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2}; \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{v}{t}; \quad v = \omega \cdot r; \quad v = \frac{2h}{t}; \quad \omega = \frac{2h}{rt}, \quad (1.2)$$

где r – радиус оси диска. Тогда, подставляя полученные значения v и ω в выражение (1.1), получим:

$$mgh = \frac{4mh^2}{2t^2} + \frac{4J \cdot h^2}{2r^2 \cdot t^2} = \frac{h^2}{t^2} \left(2m + \frac{2J}{r^2} \right) \Rightarrow \frac{mgh t^2}{h^2} = 2m + \frac{2J}{r^2}, \quad (1.3)$$

Полученное выражение преобразуем относительно момента инерции:

$$J = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \text{ или } J_{\text{эксп}} = \frac{mD^2}{2} \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (1.4)$$

где $D = D_0 + D_{\text{н}}$; D_0 – диаметр оси маятника; $D_{\text{н}}$ – диаметр нити.

Выражение (1.4) является рабочей формулой для экспериментального определения момента инерции маятника.

Теоретическое значение момента инерции маятника Максвелла представляет собой сумму моментов инерции:

а) Момент инерции оси маятника

$$J_0 = \frac{1}{8} m_0 D_0^2, \quad (1.5)$$

где m_0 и D_0 – масса и внешний диаметр оси маятника.

б) Момент инерции диска

$$J_d = \frac{1}{8} m_d (D_0^2 + D_d^2), \quad (1.6)$$

где m_d и D_d – масса и внешний диаметр диска.

в) Момент инерции кольца

$$J_k = \frac{1}{8} m_k (D_d^2 + D_k^2), \quad (1.7)$$

где m_k и D_k – масса и внешний диаметр кольца

Запишем эту сумму:

$$J_{\text{теор}} = J_0 + J_d + J_k,$$

$$J_{\text{теор}} = \frac{1}{8} m_0 D_0^2 + \frac{1}{8} m_d (D_0^2 + D_d^2) + \frac{1}{8} m_k (D_d^2 + D_k^2). \quad (1.8)$$

Выражение (1.8) является рабочей формулой для определения теоретического значения момента инерции маятника Максвелла.

2.2. Проверка закона сохранения энергии

Закон сохранения энергии: полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной

$$W = W_{\text{К}} + W_{\text{П}}.$$

Потенциальная энергия поднятого маятника равна:

$$W_{\text{П}} = mgh, \quad (1.9)$$

где $m = m_0 + m_d + m_k$ – масса маятника.

Кинетическая энергия маятника складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения:

$$W_K = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \quad (1.10)$$

После замены значений v и ω из уравнений (1.2) получим:

$$W_K = \frac{2h^2}{t^2} \left(m + \frac{J\omega^2}{2} \right), \quad (1.11)$$

где $m = m_0 + m_d + m_k$ – масса маятника.

Если не учитывать трение и сопротивление среды, то величины W_{II} и W_K должны быть одинаковы.

3. Порядок и обработка результатов эксперимента

1. Установить груз маятника в крайнее нижнее положение.
2. Проверить совпадает ли ось груза маятника с нулем шкалы на стойке. Если нет, то отрегулировать, перемещая шкалу.
3. Откорректировать ось маятника так, чтобы она была параллельно основанию прибора.
4. Отрегулировать положение фото ворот так, чтобы ось диска в нижнем положении маятника пересекала оптическую ось фотодатчика.
5. Включить универсальный секундомер.
6. Установить нажатием кнопки «РЕЖИМ» режим № 2.
7. Нажать кнопку «СТОП\СБРОС», при этом подается напряжение на электромагнит. Электромагнит фиксации маятника включится, что позволит зафиксировать груз в верхнем положении.
8. На ось маятника намотать нить подвески и зафиксировать маятник при помощи электромагнита.
9. Нажать клавишу «ПУСК\ВЫБОР» – электромагнит отключится, и маятник начнет движение.
- Секундомер включится и начнет отсчет.
10. При достижении нижней точки секундомер остановит счет.
11. По шкале на вертикальной стойке прибора определить высоту падения маятника, отмечая по оси верхнее и нижнее положение маятника.

12. Записать получившееся значение времени падения маятника и высоты.

13. Повторить замеры 5 раз с одним и тем же кольцом на диске. Определить среднее значение времени падения и высоты.

14. Используя формулы (1.4), (1.8), (1.9), (1.11), произвести расчеты момента инерции и энергии маятника $J_{\text{экспер}}$, $J_{\text{теор}}$, $W_{\text{П}}$, $W_{\text{К}}$.

15. Результаты измерений и расчетов занести в таблицу.

16. Для вычислений необходимо измерить диаметр диска, кольца, оси маятника, нити, внешний диаметр оси диска, внешний диаметр диска, внешний диаметр кольца.

Для расчетов принять следующие значения масс:

– масса оси маятника = 0,09 кг;

– масса диска = 0,100 кг;

– массы колец = 250 г; 330 г.

17. Рассчитайте случайную и систематическую погрешность измерения момента инерции.

Контрольные вопросы для допуска к лабораторной работе

1. Какая цель лабораторной работы?

2. Какие физические величины характеризуют поступательное движение твердого тела? Дайте их определение, физический смысл, формулы, единицы измерения.

3. Какими физическими величинами описывается вращательное движение твердого тела? Дайте их определение, физический смысл, формулы, единицы измерения.

4. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения твердого тела.

5. Сделайте подробный вывод формулы (1.4), (1.8), (1.9), (1.11).

6. Опишите устройство лабораторной установки. Какие показания Вы будете снимать в ходе выполнения лабораторной работы?

Контрольные вопросы для защиты лабораторной работы

1. Что представляет собой маятник Максвелла?

2. О каком законе сохранения идет речь в этой работе? Сформулируйте его. Запишите его в виде уравнения.

3. Выведите формулы для расчета момента инерции диска и кольца.

4. Какой энергией обладает маятник, поднятый на некоторую высоту относительно положения равновесия? В нижней точке тра-

ектории? Какие изменения происходят с механической энергией маятника при его движении?

5. Почему движение маятника можно назвать колебательным и почему колебания будут затухающими?

6. При каких условиях и почему движение маятника можно считать равноускоренным?

7. Какие законы и физические соотношения использовались при выводе формулы для экспериментального определения момента инерции маятника Максвелла? Запишите эти законы и соотношения и объясните их.

8. Запишите расчетную формулу для момента инерции маятника, укажите, какие параметры определяются опытным путем.

9. Нити маятника Максвелла прикреплены к пружинным весам. Что должно происходить с указателем весов в то время, когда диск-маховик исполняет свое движение вверх и вниз? Останется ли указатель в покое? Если будет двигаться, то в какую сторону.

10. Был маятник Максвелла изобретен Джеймсом Клерком Максвеллом?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

Цель работы. Проверка основного уравнения динамики вращательного движения, определение момента инерции маятника Обербека.

1. Описание лабораторной установки

Для выполнения лабораторной работы используется комплект специализированного лабораторного оборудования «Механика-1», в которую входит маятник Обербека.

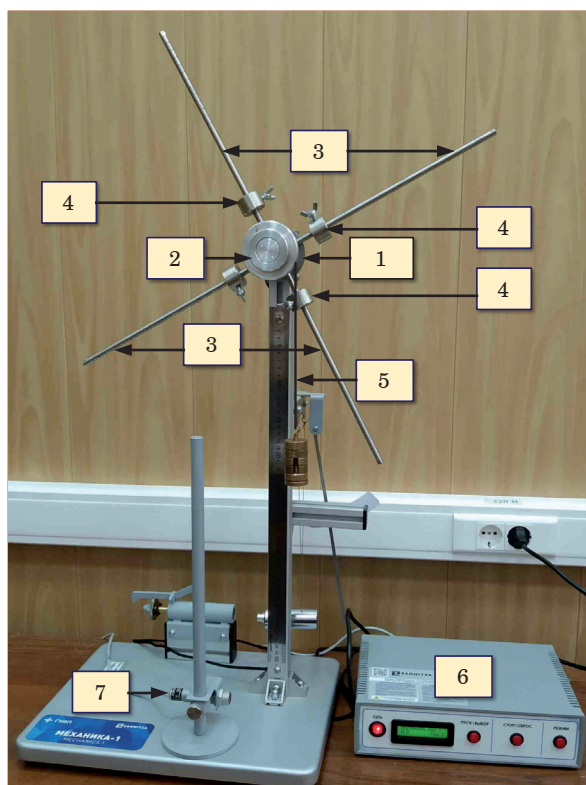


Рис. 2.1. Маятник Обербека перед запуском физического эксперимента.
На держателе для грузов расположено 5 грузиков: 1 – крестовина; 2 – шкивы;
3 – стержни; 4 – грузы; 5 – нить; 6 – универсальный электронный
измерительный блок; 7 – фотодатчик

Маятник Обербека представляет собой свободно вращающуюся на горизонтальной оси крестовину 1 со двумя шкивами 2 с различными диаметрами. Схема установки представлена на рис. 2.1.

Крестовина состоит из четырех стержней 3, закрепленных под прямым углом к оси и друг к другу. На каждый стержень надето по одинаковому грузу 4, которые можно передвигать вдоль стержня и закреплять в любой точке между его основанием и концом. На шкив 2 навита привязанная к нему одним концом нить 5, на другом конце которой подвешивается держатель для грузиков. Измерения времени падения груза производятся при помощи универсального электронного измерительного блока 6 и фотодатчика 7.

2. Теоретические сведения

Движение крестообразного маятника Обербека является вращательным. Поэтому рассмотрим кинематику вращательного движения абсолютно твердого тела.

Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обуславливают.

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой *осью вращения*.

Абсолютно твердым называют тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться и при всех условиях расстояние между двумя точками (или точнее между двумя частицами) этого тела остается постоянным.

При вращении тела вокруг закрепленной оси все его точки описывают окружности различного радиуса и, следовательно, имеют различные перемещения, скорости и ускорения. Тем не менее можно описать вращательное движение всех точек тела одинаковым образом. Для этого используют следующие кинематические характеристики движения: угол поворота $\Delta\bar{\varphi}$, угловую скорость $\bar{\omega}$ и угловое ускорение $\bar{\epsilon}$. Эти характеристики будут одинаковы для любой точки *абсолютно твердого тела*. Модуль вектора поворота равен величине угла поворота $\Delta\varphi$; вектор поворота $\Delta\bar{\varphi}$ направлен по оси вращения по правилу буравчика (правого винта).

Угловая скорость тела $\bar{\omega}$ характеризует быстроту вращения. Она равна отношению вектора элементарного угла поворота тела к продолжительности этого поворота:

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\varphi}}{dt}. \quad (2.1)$$

Быстроту изменения угловой скорости во времени характеризует угловое ускорение

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d^2\bar{\varphi}}{dt^2}. \quad (2.2)$$

При возрастании угловой скорости ω угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ совпадает с ней по направлению, при убывании – направлено в противоположную сторону.

Найдем связь между линейными и угловыми величинами. Величина линейного перемещения dS точки, вращающейся по окружности радиуса r :

$$dS = r \cdot d\varphi. \quad (2.3)$$

Разделив обе части уравнения (2.3) на dt , получим:

$$\frac{dS}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Так как производная пути по времени – это величина скорости:

$$\frac{dS}{dt} = v, \text{ а } \omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

то:

$$v = r \cdot \omega. \quad (2.4)$$

Теперь продифференцируем уравнение (2.4) по времени:

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt},$$

или:

$$a_\tau = r\varepsilon, \quad (2.5)$$

где a_τ – касательное (тангенциальное) ускорение, определяющее быстроту изменения модуля скорости v :

$$\frac{dv}{dt} = a_\tau. \quad (2.6)$$

При описании движения маятника Обербека необходимо использовать динамику движения абсолютно твердого тела.

Моментом силы \vec{F} относительно точки O называется физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора

\vec{r} , проведенного из точки O в точку приложения силы, на вектор силы \vec{F} :

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (2.7)$$

Направление момента силы определяется правилом буравчика (рис. 2.2), величина момента силы

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha, \quad (2.8)$$

где α – угол между радиус-вектором \vec{r} точки приложения силы и вектором силы \vec{F} .

Момент силы относительно оси характеризует способность силы вращать тело вокруг этой оси. Составляющая силы, параллельная закрепленной оси, вращения тела вызвать не может, а напряжения, при этом возникающие в оси, нас не интересуют. Тогда достаточно рассмотреть силы, направления которых перпендикулярны оси вращения OO' (рис. 2.2). Определим плечо силы l относительно оси OO' как расстояние от оси вращения до линии действия силы, тогда

$$l = r \sin \alpha, M = Fl. \quad (2.9)$$

Более того, поворот тела с закрепленной осью вращения может быть вызван только тангенциальной (касательной) составляющей силы F_k , причем эта составляющая тем успешнее осуществит поворот, чем больше ее плечо r :

$$M = F_k r, \quad (2.10)$$

так как $F_k = F \sin \alpha$.

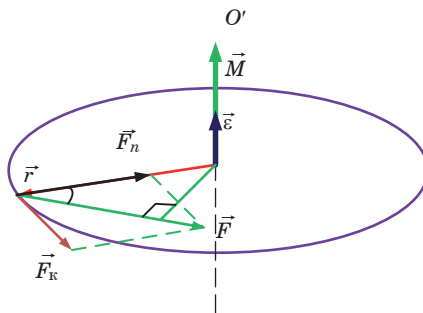


Рис. 2.2. Определение момента силы относительно точки O

Пусть твердое тело разбито на отдельные элементарные массы Δm . Выразим касательную составляющую равнодействующей сил, приложенных к этой точке, по второму закону Ньютона:

$$F_{\text{к}} = \Delta m \cdot a_{\text{к}}. \quad (2.11)$$

Учитывая (2.5) для касательного ускорения, получим из (2.10) и (2.11):

$$M = \Delta m \cdot r^2 \cdot \varepsilon. \quad (2.12)$$

Скалярная величина

$$I = \Delta m r^2, \quad (2.13)$$

равная произведению массы материальной точки на квадрат ее расстояния до оси, называется моментом инерции материальной точки относительно оси.

Векторы \vec{M} и $\vec{\varepsilon}$ совпадают по направлению с осью вращения, связаны с направлением вращения по правилу буравчика, поэтому равенство (2.12) можно переписать в векторной форме:

$$\vec{M} = I \vec{\varepsilon} \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) является *основным законом динамики вращательного движения* для материальной точки. Соотношение, аналогичное (2.12), можно записать для каждой точки тела, и затем просуммировать по всем точкам, тогда (с учетом того, что угловое ускорение одинаково для всех точек и его можно вынести за знак суммы):

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{\varepsilon} \sum_i (\Delta m_i r_i^2). \quad (2.15)$$

В левой части равенства стоит сумма моментов всех сил (и внешних, и внутренних), приложенных к каждой точке тела. Но по третьему закону Ньютона силы, с которыми точки тела взаимодействуют друг с другом (внутренние силы), равны по величине и противоположны по направлению и лежат на одной прямой, поэтому их моменты компенсируют друг друга. Таким образом, в левой части (2.15) остается суммарный момент только внешних сил.

Сумма произведений элементарных масс на квадрат их расстояний от оси вращения называется моментом инерции твердого тела относительно данной оси:

$$I = \sum_i (\Delta m_i r_i^2). \quad (2.16)$$

Момент инерции I твердого тела является мерой инертных свойств твердого тела при вращательном движении и аналогичен массе тела во втором законе Ньютона.

Он зависит не только от массы тела, но и от ее распределения относительно оси (в направлении, перпендикулярном оси). В случае непрерывного распределения массы сумма в (2.16) сводится к интегралу по всему объему тела:

$$I = \int_m r^2 dm = \rho \int_V r^2 dV, \text{ где } \rho = \frac{m}{V}. \quad (2.17)$$

Таким образом, угловое ускорение твердого тела прямо пропорционально суммарному моменту внешних сил, приложенных к телу, и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно оси вращения

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum \vec{M}}{I}. \quad (2.18)$$

Это – основной закон динамики твердого тела. Он аналогичен второму закону Ньютона при поступательном движении

$$\bar{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \quad (2.19)$$

и позволяет определить угловое ускорение твердого тела.

Подсчет момента инерции тела относительно произвольной оси облегчается применением *теоремы Штейнера*:

Момент инерции тела I относительно любой оси равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния b между осями

$$I = I_c + mb^2. \quad (2.20)$$

3. Экспериментальная часть лабораторной работы

3.1. Определение момента инерции маятника Обербека

Момент инерции маятника Обербека может быть представлен как сумма моментов инерции барабана со стержнями I_1 и моментов инерции четырех грузов массой m_1 , закрепленных на расстояниях от оси вращения $4I_2$. Если размеры этих грузиков малы по сравнению с r , то их можно считать материальными точками. Для матери-

альной точки момент инерции равен $I_2 = m_1 r^2$. Тогда момент инерции маятника

$$I = I_1 + 4m_1 r^2. \quad (2.21)$$

3.2. Методика эксперимента

В лабораторной установке на барабане имеется два шкива с различными диаметрами D_1 и D_2 . Время движения груза t измеряется электронным секундомером, включение которого производится кнопкой «Пуск», а остановка происходит по сигналу фотодатчика. Груз опускается на расстояние x , измеряемое вертикально закрепленной линейкой. Установка имеет электромеханическое тормозное устройство, управление которого осуществляется по сигналу фотодатчика.

Для расчета движения механической системы маятник-груз применим уравнение динамики поступательного движения для груза, закрепленного на нити, и уравнение динамики вращательного движения для маятника.

Груз массой m движется с ускорением a под действием результирующей сил тяжести mg и силы натяжения нити F_{1H} (рис. 2.3).

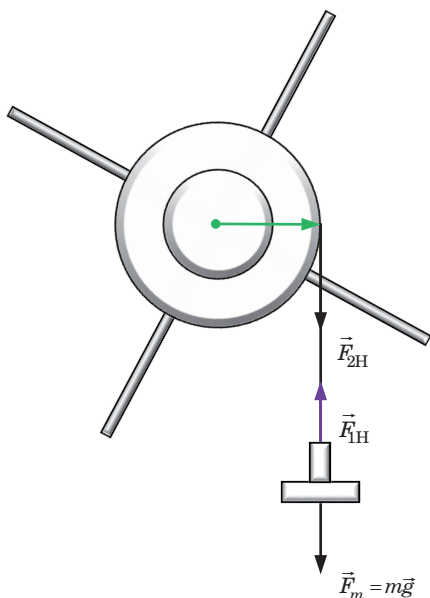


Рис. 2.3. Маятник Обербека. Вектора сил

Запишем для груза второй закон Ньютона в проекции на направление движения:

$$ma = mg - F_{1H} \quad (2.22)$$

Сила натяжения передается нитью от груза к шкиву вращающегося маятника. Если предположить, что нить невесомая, то на шкив маятника действует сила F_{2H} , равная по величине F_{1H} и противоположная ей по направлению (следствие третьего закона Ньютона: $|F_{1H}| = |F_{2H}|$). Сила натяжения создает вращательный момент M_0 относительно горизонтальной оси O , направленный вдоль этой оси «от нас» и приводящий в движение маятник Обербека. Величина этого момента равна $M_0 = F_{2H} \cdot R = F_{1H} \cdot R$, где R – радиус шкива, на который намотана нить, $R = D/2$, где D – диаметр шкива.

Момент силы сопротивления относительно оси вращения $M_{\text{СОПР}}$ направлен в противоположную сторону (к нам).

Запишем для маятника основной закон динамики вращательного движения:

$$M = J\varepsilon,$$

где M – результирующий момент сил; J – момент инерции маятника; ε – угловое ускорение.

В скалярной форме это уравнение имеет вид (записаны проекции векторов моментов сил и углового ускорения на ось вращения O , направление которой выбрано «от нас»):

$$F_{1H}R - M_{\text{СОПР}} = J\varepsilon, \quad (2.23)$$

Используя кинематическую связь линейного и углового ускорения $a = \varepsilon R$, а также уравнение движения груза при нулевой начальной скорости $x = \frac{at^2}{2}$, выразим ε через измеряемые величины x и t :

$$\varepsilon = \frac{2x}{Rt^2}. \quad (2.24)$$

Решим систему уравнений (2.22) и (2.23), для чего умножим (2.22) на R и сложим с (2.23):

$$mgR - M_{\text{СОПР}} = m\varepsilon R^2 + I\varepsilon.$$

Выражаем момент инерции маятника Обербека:

$$I = \frac{mgR - M_{\text{СОПР}}}{\varepsilon} - mR^2. \quad (2.25)$$

Все величины, кроме $M_{\text{СОПР}}$, входящие в это уравнение, известны. Поставим задачу экспериментального определения $M_{\text{СОПР}}$.

Пусть I – момент инерции маятника Обербека без грузов. Из (2.24) следует, что

$$\varepsilon = \frac{mgR - M_{\text{СОПР}}}{I + mR^2} . \quad (2.26)$$

В условиях эксперимента $mR^2 \ll I$, что позволяет считать зависимость $\varepsilon(m)$ линейной.

Эту зависимость можно использовать для экспериментальной оценки величины $M_{\text{СОПР}}$.

Действительно, если полученную экспериментально зависимость $\varepsilon(m)$ экстраполировать до пересечения с осью абсцисс, то есть до точки m_0 на этой оси, для которой выполняется (2.25) равенство $m_0gR - M_{\text{СОПР}} = 0$, то это позволяет определить $M_{\text{СОПР}}$ как:

$$M_{\text{СОПР}} = m_0 \cdot g \cdot R. \quad (2.27)$$

Для определения момента инерции маятника I воспользуемся (2.5), где величина $M_{\text{СОПР}}$ предварительно определена из измерений $\varepsilon(m)$ и формулы (2.7). Подставив выражение ε из (2.4) и $M_{\text{СОПР}}$ из (2.7) в (2.5), получаем рабочую формулу для определения момента инерции маятника:

$$I = \frac{(m - m_0)gR^2t^2}{2x} - mR^2 .$$

Для используемого в работе маятника Обербека справедливо неравенство

$$\frac{gt^2}{2x} \gg \frac{m}{m - m_0} .$$

Учитывая это, получаем:

$$I = \frac{(m - m_0)gR^2t^2}{2x} .$$

Для расчетов удобно представить момент инерции в виде:

$$I = k(m - m_0) \cdot t^2, \quad (2.28)$$

где $k = \frac{gD^2}{8x}$.

Таким образом, для определения момента инерции маятника необходимо измерить время t опускания груза массой m на расстояние x .

Зависимость момента инерции маятника от расстояния грузов до оси вращения предполагается проверить, используя результаты, полученные по формуле (2.28). Значение m_0 можно взять из данных эксперимента для определения момента инерции маятника Обербека без грузов, считая, что момент сил сопротивления остается постоянным.

Рекомендуемое задание к работе

1. Перед началом эксперимента необходимо снять грузы со стержней.

2. Включить электронный секундомер и выбрать «Режим № 1» (светится индикатор «Реж.1»). Установить фотодатчик в плоскости вращения маятника Обербека.

3. Выбрать произвольную отметку (например, 50 см), от которой начнется движение груза m .

4. Вращением маятника, намотать нить на шкив, следить за тем, чтобы груз m достиг выбранной отметки. Электромагнит включается нажатием кнопки «СТОП\СБРОС» на секундомере.

5. Провести первый опыт, используя в качестве груза, только один подвес массой $m_{\text{под}}$ без дополнительных грузов. Затем нажать на кнопку «ПУСК\ВЫБОР». При этом отключится тормозное устройство, удерживающее маятник, и одновременно включится секундомер. В момент прохождения груза нижней точки срабатывает тормозное устройство и подвес с грузом автоматически останавливается. Полученные значения измерений необходимо записать. Для обнуления секундомера и отключения электромагнита необходимо нажать на кнопку «СТОП\СБРОС».

6. Провести эксперимент повторно, но при этом добавить дополнительные грузы. Результаты занести в таблицу измерений. По формуле (2.24) рассчитать величину углового ускорения ε для соответствующих значений m .

7. Построить зависимость $\varepsilon(m)$. Определить из графика по точке его пересечения с осью абсцисс значение m_0 , при котором $\varepsilon=0$. Рассчитать по формуле (2.27) величину момента сил сопротивления $M_{\text{СОПР}}$.

8. Вычислить по формуле (2.28) значение момента инерции барабана со стержнями I_1 .

9. Закрепить грузы m_1 на стержнях маятника на равном расстоянии r от оси вращения, определить это расстояние можно, используя деления, нанесенные на стержни и указанные около установки исходные данные.

10. Провести однократные измерения времени t опускания груза массой m (выбрать одно значение) для одной высоты падения и при трех различных расстояниях r от оси вращения.

11. Вычислить моменты инерции маятника с грузами на стержнях по формуле (2.28) при различных расстояниях r . При этом, как показали предварительные опыты, можно с допустимой точностью использовать в качестве величины m_0 ее значение, найденное ранее для крестовины без грузов на спицах. Сравнить полученные данные со значениями момента инерции, рассчитанными по формуле (2.21) для соответствующих значений.

12. Построить на одном рисунке графики экспериментально полученной и теоретически ожидаемой зависимости момента инерции маятника от r^2 .

Контрольные вопросы для допуска к лабораторной работе

1. Сформулируйте определения следующих терминов: кинематика, вращательное движение, абсолютно твердое тело.

2. Что такое угловая скорость и угловое ускорение тела?

3. Что такое момент силы относительно точки O и момент силы относительно оси?

4. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения для материальной точки.

5. Что такое момент инерции тела? Какова роль момента инерции во вращательном движении?

6. Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.

7. Выведите формулу (2.24) для нахождения углового ускорения ϵ .

8. Выведите формулу (2.27) для нахождения величины момента сил сопротивления $M_{\text{сопр}}$.

Контрольные вопросы для защиты лабораторной работы

1. Дайте определение углового перемещения, угловой скорости и ускорения. Как направлены эти вектора?

2. Выведите формулы, связывающие линейные и угловые величины перемещения, скорости, ускорения.

3. Что такое момент силы относительно точки? Относительно оси? От чего он зависит? Как направлен вектор момента силы?

4. Что такое момент инерции материальной точки и твердого тела? От чего он зависит?
5. Сформулируйте и докажите основной закон динамики вращательного движения.
6. Сформулируйте теорему Штейнера и покажите, где в работе она используется.
7. Как и почему изменяется время движения гири, если грузы на спицах передвинуть ближе к оси вращения?
8. При каком расположении грузов на крестовине их можно считать точечными, при каком – нельзя?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ И ОЦЕНКА МОМЕНТА СИЛ ТРЕНИЯ

Цель работы. Оценить момент тормозящей силы, действующий на тело в процессе вращения. Определить момент инерции тела с учетом момента тормозящей силы. Произвести расчет моментов, пользуясь энергетическими соотношениями.

1. Теоретические сведения

Рассмотрим тело вращения, у которого на шкив может наматываться нить с грузом массой m на конце (рис. 3.1). Груз под действием силы тяжести \vec{F}_m может опускаться, приводя во вращение тело. После того, как груз от отметки h_0 опустится на полную длину нити до отметки h_1 , тело, вращаясь по инерции, поднимет груз снова на некоторую высоту до отметки h_2 .

В процессе движения часть механической энергии системы тело-груз расходуется на работу против тормозящей силы и, следо-

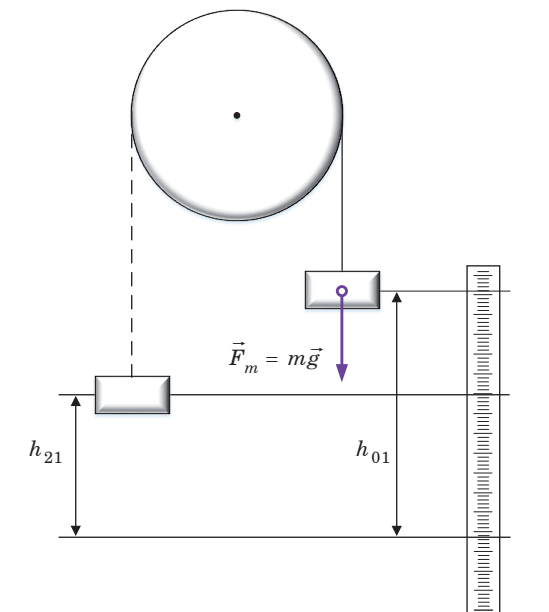


Рис. 3.1. Движение груза, прикрепленного к шкиву

вательно, превращается во внутреннюю энергию системы и окружающего воздуха, которые нагреваются. Из этого следует, что тело поднимет груз на высоту меньшую начальной, то есть отметка h_2 всегда будет расположена ниже отметки h_0 . Тормозящая сила складывается из силы трения в подшипниках и из силы трения о воздух при движении тела и груза.

Для оценки момента тормозящей силы воспользуемся энергетическими соотношениями. Поскольку силы трения являются диссипативными, то работа тормозящей силы A_T при переходе системы тело-груз из начального состояния в конечное равна

$$A_T = E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}}, \quad (3.1)$$

где $E_{\text{нач}}$ – механическая энергия системы тело-груз в начальном состоянии; $E_{\text{кон}}$ – механическая энергия системы тело-груз в конечном состоянии.

Если работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется диссипативной.

Механическая энергия системы складывается из кинетической и потенциальной энергий. В те моменты времени, когда система покоится, кинетическая энергия равна нулю и, следовательно, механическая энергия становится равной только потенциальной энергии системы. Такие состояния системы возникают в начальный момент времени, когда груз находится на отметке h_0 , и в тот момент, когда, спустившись вниз, груз за счет вращения тела поднимается до отметки h_2 . Если принять, что на высоте h_1 потенциальная энергия груза равна нулю, то приращение механической энергии для выбранных начального и конечного состояний системы равно

$$E_2 - E_0 = mg|h_2 - h_1| - mg|h_0 - h_1| = mg(h_{21} - h_{01}), \quad (3.2)$$

где h_{01} – расстояние между отметками h_0 и h_1 ; h_{21} – расстояние между отметками h_2 и h_1 .

Будем считать, что момент тормозящей силы в основном связан с вращательным движением тела, т. е. тормозящей силой, действующей на груз, пренебрежем. Тогда элементарная работа момента тормозящей силы равна скалярному произведению

$$\delta A_T = \overline{M}_T \cdot \overline{d\varphi},$$

где \overline{M}_T – вектор момента тормозящей силы; $\overline{d\varphi}$ – вектор бесконечного малого углового перемещения.

Оба вектора $\overline{M_T}$ и $\overline{d\varphi}$ направлены вдоль оси вращения, но в противоположные стороны. Следовательно,

$$\delta A_T = |\overline{M_T}| \cdot |\overline{d\varphi}| \cos 180^\circ = -|\overline{M_T}| \cdot |\overline{d\varphi}| = -M_T \cdot d\varphi.$$

Полная работа момента тормозящей силы, если предположить, что он постоянен, тогда равна

$$A_T = -\int_0^2 M_T \cdot d\varphi = -M_T \cdot \varphi_{02}, \quad (3.3)$$

где φ_{02} – угол поворота тела вокруг оси при переходе системы из начального состояния в конечное (груз при этом перемещается от отметки h_0 до отметки h_2).

При движении груза вниз от отметки h_0 до отметки h_1 со шкива сматывается нить длиной $|h_0 - h_1|$. Учитывая, что длина окружности шкива равна $2\pi r$ и каждый оборот шкива соответствует углу 2π радиан, найдем угол поворота шкива при движении груза вниз:

$$\varphi_{01} = \frac{|h_0 - h_1|}{2\pi r} \cdot 2\pi = \frac{|h_0 - h_1|}{r} \text{ радиан.} \quad (3.4)$$

Очевидно, что при дальнейшем вращении тела до момента, когда груз остановится на отметке h_2 , оно повернется на угол

$$\varphi_{12} = \frac{|h_2 - h_1|}{r} \text{ радиан.}$$

Тогда общий угол поворота тела, соответствующий переходу груза от отметки h_0 до отметки h_2 , равен

$$\varphi_{02} = \varphi_{01} + \varphi_{12} = \frac{|h_0 - h_1| + |h_2 - h_1|}{r} \text{ радиан.} \quad (3.5)$$

Подставляя (3.2) и (3.3) в (3.1) найдем

$$-M_T \cdot \varphi_{02} = mg|h_2 - h_1| - mg|h_0 - h_1| = mg(h_{21} - h_{01}).$$

Отсюда, используя (3.5), получаем формулу для оценки модуля вектора момента тормозящей силы:

$$M_T = mgr \frac{|h_0 - h_1| - |h_2 - h_1|}{|h_0 - h_1| + |h_2 - h_1|} = mgr \frac{h_{01} - h_{21}}{h_{01} + h_{21}}. \quad (3.6)$$

Рассмотрим систему тело-груз в начальный момент времени, когда груз находится на отметке h_0 , а в качестве конечного выберем тот момент времени, когда груз опустился до нижней отметки h_1 , соответствующей полной длине нити. Опять будем исходить из энергетического соотношения (3.1).

Для выбранных начального и конечного состояний получим

$$A_T = -M_T \varphi_{01}, \quad (3.7)$$

где M_T – момент тормозящей силы (3.6); φ_{01} – угол поворота тела, соответствующий перемещению груза от отметки h_0 до h_1 (3.4).

Начальная механическая энергия системы тело-груз равна

$$E_0 = mg|h_0 - h_1| = mgh_{01}. \quad (3.8)$$

Конечная механическая энергия системы складывается из кинетической энергии вращательного движения тела и кинетической энергии поступательного движения груза в момент прохождения им отметки h_1 :

$$E_1 = E_{\text{вращ}} + E_{\text{пост}} = \frac{I\omega_1^2}{2} + \frac{m\nu_1^2}{2}, \quad (3.9)$$

где I – момент инерции тела; ω_1 – угловая скорость вращения тела в момент t_1 ; ν_1 – скорость поступательного движения груза в момент t_1 .

Строго говоря, в процессе движения груз за счет упругого растяжения нити опускается чуть ниже отметки h_1 , тормозится нитью, а затем за счет упругого сжатия нити возвращается на эту отметку.

Предполагая, что движение системы является равноускоренным, для скорости груза на отметке h_1 получаем

$$\nu_1 = \frac{2|h_0 - h_1|}{t_1} = \frac{2h_{01}}{t_1}, \quad (3.10)$$

где t_1 – время, за которое груз опустится от отметки h_0 до h_1 .

Угловая скорость вращения тела в тот же момент времени равна

$$\omega_1 = \frac{\nu_1}{r}, \quad (3.11)$$

где r – радиус шкива, на который намотана нить.

Подставляя (3.7), (3.8), (3.9) в (3.1), получим

$$-M_T \varphi_{01} = \frac{I\omega_1^2}{2} + \frac{m\nu_1^2}{2} - mg|h_0 - h_1|.$$

Из этой формулы, учитывая (3.4), (3.10) и (3.11), выражаем момент инерции I :

$$I = \frac{(mgr - M_T)rt_1^2}{2|h_0 - h_1|} - mr^2 = \frac{(mgr - M_T)rt_1^2}{2h_{01}} - mr^2, \quad (3.12)$$

где M_T – момент тормозящей силы, которой вычисляется по формуле (3.6).

2. Методика эксперимента

Для выполнения лабораторной работы используется комплект специализированного лабораторного оборудования «Механика-1», в которую входит маятник Обербека. Фотография и описание данной установки приведено в лабораторной работе № 2.

На шкив намотана нить, один конец которой прикреплен к шкиву, а другой – к подставке массой $m_{\text{под}}$ (рис. 3.2). На подставку могут помещаться дополнительные грузы массой $m_{\text{г}}$.

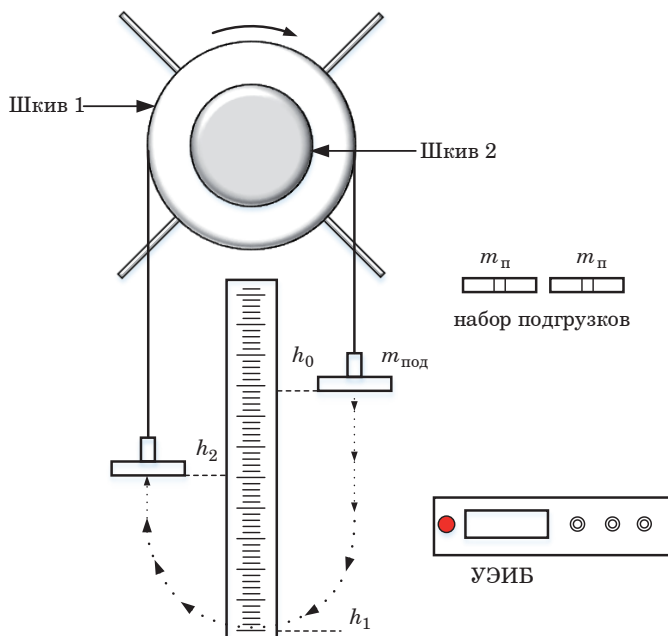


Рис. 3.2. Схема эксперимента

1. Выбрать «Режим № 2» на универсальном электронно-измерительном блоке (УЭИБ).

2. Установить груз на высоту h_0 (от 30 до 50 см), используя в качестве груза, нить с подвесом массой $m_{\text{под}}$ без дополнительных грузов.

3. Электромагнит (удерживающее устройство), включается нажатием кнопки «СТОП\СБРОС» УЭИБ.

4. Нажать кнопку «ПУСК\ВЫБОР» – произойдет отпускание электромагнита удерживающего устройства. После прохождения грузом нижнего положения секундомер автоматически остановится. При этом электромагнит не отключится и груз продолжит свое движение. После достижения верхней точки подъема нажмите кнопку «СТОП\СБРОС». Это приведет к срабатыванию электромагнита и остановке груза.

5. Зафиксировать время опускания и высоту последующего подъема груза.

6. Измерить высоту с помощью линейки, расположенной на стойке механического блока.

7. Для сброса счетчика времени и отпускания удерживающего электромагнита нажать кнопку «СТОП\СБРОС» секундомера.

Рекомендуемое задание к работе

1. Провести оценку значения момента тормозящей силы M_T , используя формулу (3.6).

2. Провести оценку значения момента инерции тела I , используя формулу (3.12).

3. Провести аналогичные опыты, поместив на подставку сначала один, а затем сразу два дополнительных груза. Результаты записать в таблицу измерений.

4. С помощью формулы (3.6) рассчитать момент тормозящей силы для опытов с другими грузами. Обратите внимание на закономерное изменение момента тормозящей силы с ростом массы груза.

5. С помощью формулы (3.12) рассчитать момент инерции тела для однократных опытов с другими грузами. Наблюдается ли закономерное изменение момента инерции с ростом массы опускаемого груза?

6. Повторить опыты, изменив диаметр шкива. Сделать соответствующие выводы.

Контрольные вопросы для допуска к лабораторной работе

1. Сформулируйте цель лабораторной работы.

2. Дайте определения углового перемещения, угловой скорости, углового ускорения. Укажите направления этих векторов. Сформулируйте физический смысл величин.

3. В каких единицах в СИ измеряются угловое перемещение, угловая скорость, угловое ускорение?

4. От чего зависит момент силы? Как направлен вектор момента силы?

5. Что характеризует момент инерции? От чего он зависит?

6. Что такое момент импульса?

7. В чем состоит основной закон динамики вращательного движения? Как в лабораторной работе он проверяется?

8. Какие величины нужно непосредственно измерить в лабораторной работе, а какие – вычислить?

Контрольные вопросы для защиты лабораторной работы

1. Запишите формулы, связывающие линейные и угловые величины перемещения, скорости, ускорения.

2. Дайте определение момента силы относительно точки; относительно оси. От чего он зависит? Как направлен вектор момента силы?

3. Выведите формулу для расчета момента тормозящей силы.

4. Запишите уравнение динамики вращательного движения твердого тела в двух различных формах.

5. Чему равна работа при вращательном движении?

6. Что такое диссипативные силы? Приведите примеры.

7. Выведите формулу (3.12).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

Цель работы. Определить величину ускорения свободного падения, пользуясь обратным маятником.

1. Теоретические сведения

Свободным падением называют движение тела вблизи поверхности Земли, при котором можно не учитывать силы сопротивления, возникающие в среде, окружающей тело. Ускорение свободного падения, которое вблизи поверхности Земли обычно обозначают g , определяется массой тела m и силой F действующей на тело,

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Система отсчета, связанная с Землей, не является инерциальной. В этой системе на тело, кроме гравитационных сил, действуют еще центробежная сила и сила Кориолиса. Последняя всегда направлена перпендикулярно к скорости движения и изменяет только направление скорости, но не ее величину. Под ускорением свободного падения обычно понимается тангенциальная (касательная) к траектории движения компонента ускорения, и сила Кориолиса при этом не учитывается. Очевидно, что для покоящегося на поверхности Земли тела сумма силы притяжения к Земле и центробежной равна силе реакции опоры, то есть весу тела.

Сила притяжения тела к Земле определяется произведением его массы m на напряженность поля тяготения Земли, которая обычно обозначается \vec{g}_0 :

$$\vec{F}_0 = m\vec{g}_0.$$

Напряженность поля тяготения определяется распределением масс в Земле. Если бы Земля представляла собой шар постоянной плотности, то внутри шара напряженность росла пропорционально расстоянию от центра Земли (линейно), а вне шара падала бы обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли. В действительности Земля не очень однородна. Плотность ее растет с глубиной. Из-за этого напряженность поля тяготения даже немного увеличивается с глубиной, примерно до 2800 км (при этом расстояние до центра Земли около 3600 км), а затем начинает па-

дать по линейному закону (пропорционально расстоянию от центра). Над поверхностью Земли распределение напряженности гравитационного поля близко к распределению вне однородного шара. На высоте полета спутников (порядка 300 км) напряженность поля тяготения меньше, чем у поверхности Земли, примерно на 10%. Наблюдения за движением спутников позволяют измерять распределение поля тяготения и анализировать распределение масс в Земле, что используется, в частности, для поиска полезных ископаемых.

Кроме сил притяжения к Земле, действуют еще силы притяжения к Луне и Солнцу, но вклад их в полную напряженность гравитационного поля очень мал, хотя они в глобальных масштабах вызывают такие заметные явления, как приливы.

Вращение Земли вокруг своей оси привело к ее деформации за счет центробежных сил. Расстояние от центра Земли до полюса примерно на 21 км меньше расстояния до экватора, которое равно 6378140 км. Для тел, вращающихся вместе с Землей, центробежные силы, как уже было сказано выше, объединяют с силами тяготения. Суммарная напряженность поля, обозначаемая g , равная ускорению свободного падения, обычно и приводится в таблицах распределения ускорения свободного падения по поверхности Земли. На полюсе $g=983,2155 \text{ см/с}^2$, а затем уменьшается с уменьшением широты, и на экваторе $g=978,0300 \text{ см/с}^2$. Это приводит, например, к тому, что маятниковые часы на экваторе за сутки отстанут от аналогичных часов на полюсе на 3,8 минуты. Направление этого поля всегда перпендикулярно к поверхностям водоемов и очень мало отличается от направления на центр Земли.

Неоднородность Земли в горизонтальном направлении также приводит к локальным изменениям g . Большое количество очень точных и длительных измерений на поверхности Земли показало, что g меняется также со временем. Периодические изменения, связанные с лунными приливами, равны примерно $2,49 \cdot 10^{-4} \text{ см/с}^2$, а с солнечными – порядка $9,6 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}^2$. Такого же порядка изменения, происходящие в течение года, связаны с геологическими процессами внутри Земли.

Измерения g на поверхности Земли и составление гравиметрических карт используются для поиска полезных ископаемых и изучения внутреннего строения Земли.

До XX-го столетия не существовало технических средств для измерения с приемлемой точностью пути и времени свободного па-

дения тела. Вследствие этого до середины XX века единственным средством измерения абсолютного значения ускорения силы тяжести являлись оборотные маятники.

Первые измерения g с точностью до 10^{-3} см/с² (миллигал) выполнены были в начале XX века с помощью оборотных маятников. Гал – единица измерения ускорения в системе СГС, равна 1 см/с². Гал назван в честь итальянского физика и астронома Галилео Галилея.

Для получения такой точности периоды колебаний маятников должны быть измерены с точностью до 10^{-6} с, а приведенные длины – до 1 микрона. Современные методы измерения полей g делятся на динамические и статические. динамическим относятся измерения с помощью маятников, в том числе и оборотных. Измерения с помощью маятников могут производиться с достаточной точностью только в стационарных лабораториях и требуют большого времени. Таких же стационарных условий требует измерение g с помощью струнного гравиметра, в котором частота колебаний струны зависит от натяжения ее грузом в поле тяжести.

В последнее время благодаря увеличению точности измерений расстояний и времен стали применяться прямые методы измерения ускорения падающих тел. Использование лазерных интерферометров для измерения пути падающего в вакуумной трубе тела, снабженного уголкового отражателем, и атомных часов позволило определить абсолютное значение ускорения свободного падения с точностью до $3 \cdot 10^{-6}$ см/с². Динамические методы позволяют измерять абсолютные значения ускорения свободного падения. Статические методы позволяют измерять относительное изменение ускорения свободного падения с точностью до $1,5 \cdot 10^{-5}$ см/с² и основываются на измерении деформации пружин, на которых подвешены грузики, либо на закручивании горизонтально закрепленных нитей (или торсионов: двух параллельно натянутых нитей) под действием рычагов с грузиками. Для большей точности (меньшего влияния изменений температуры) используются пружины и нити из кварца. Точные абсолютные измерения этими способами затруднены из-за отклонения зависимости между деформацией пружины и нагрузкой на нее от линейной (закона Гука). Измеренные относительные изменения g привязываются к ряду опорных точек, в которых получены абсолютные значения динамическими методами. Таки-ми методами создаются гравиметрические карты.

Период колебаний физического маятника определяется формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}, \quad (4.1)$$

здесь I – момент инерции маятника относительно оси качания; m – масса маятника; a – расстояние от центра масс до оси качания.

Приведенная длина $l_{\text{пр}}$ физического маятника, равная длине математического маятника, имеющего такой же период колебаний, выражается формулой:

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ma}. \quad (4.2)$$

Массу маятника и период его колебаний можно измерить с очень высокой точностью, но точно измерить момент инерции не удастся. Указанного недостатка лишен метод оборотного маятника, который позволяет исключить момент инерции из расчетной формулы для g .

Метод оборотного маятника основан на том, что период колебаний физического маятника не изменяется при перемещении оси качаний в центр качаний, т. е. в точку, отстоящую от оси качаний на расстояние, равное приведенной длине маятника, и лежащую на одной прямой с точкой подвеса и центром масс маятника.

2. Описание лабораторной установки

Применяемый в настоящей работе оборотный маятник (рис. 4.1) состоит из стержня, на котором укреплены две однородные призмы Π_1 и Π_2 . Период колебаний маятника можно менять при помощи подвижных грузов Γ_1 , Γ_2 . Измерение периода колебаний производится с помощью фотодатчика Φ_1 , подключенного к универсальному электронному измерительному блоку (рис. 4.2)

Допустим, что нам удалось найти такое положение грузов, при котором периоды колебаний маятника T_1 и T_2 на призмах совпадают, т. е.

$$T_1 = T_2 = T = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mgl_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{mgl_2}}, \quad (4.3)$$

где l_1 и l_2 – расстояния от центра массы до призм Π_1 и Π_2 .

Условием этого, очевидно, является равенство приведенных длин, т. е. равенство величин

$$\frac{I_1}{ml_1} \text{ и } \frac{I_2}{ml_2}.$$

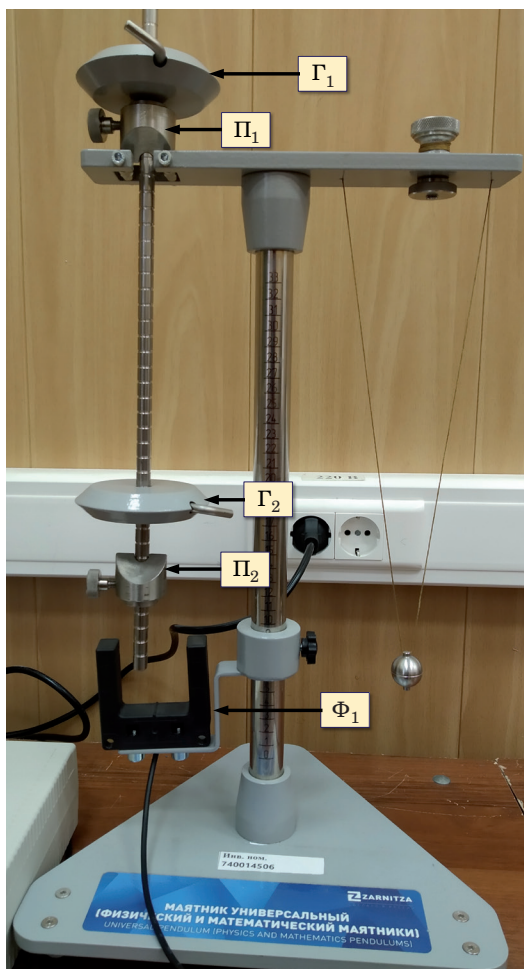


Рис. 4.1. Обратный маятник маятника:
 Π_1, Π_2 – призмы; Γ_1, Γ_2 – подвижные грузы; Φ_1 – фотодатчик



Рис. 4.2. Универсальный электронный измерительный блок

По теореме Гюйгенса-Штейнера

$$I_1 = I_0 + ml_1^2, \quad I_2 = I_0 + ml_2^2, \quad (4.4)$$

где I_0 – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс (и параллельной оси качаний). Исключая из (4.3) и (4.4) I_0 и m , получим формулу для определения g :

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(l_1 + l_2) = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \quad (4.5)$$

Здесь $L=l_1+l_2$ – расстояние между призмами Π_1 и Π_2 , которое легко может быть измерено с высокой точностью (0,1мм) при помощи большого штангенциркуля (но не путем суммирования измерений l_1 и l_2 , погрешность получения которых в работе велика и составляет несколько миллиметров).

Заметим, что формула (4.5) следует из формул (4.3) и (4.4) лишь при условии, что $l_1 \neq l_2$, так как при $l_1=l_2$ равенства (4.3) и (4.4) удовлетворяются тождественно.

При выводе формулы (4.5) мы полагали, что $T_1=T_2$. На самом деле точного равенства периодов добиться, конечно, невозможно. Тогда

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml_1^2}{mgl_1}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml_2^2}{mgl_2}}. \quad (4.6)$$

Из этих равенств имеем

$$T_1^2 gl_1 - T_2^2 gl_2 = 4\pi^2(l_1^2 - l_2^2), \quad (4.7)$$

откуда

$$g = 4\pi^2 \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1 T_1^2 - l_2 T_2^2} = 4\pi^2 \frac{L}{T_0^2}, \quad (4.8)$$

где

$$T_0^2 = \frac{l_1 T_1^2 - l_2 T_2^2}{l_1 - l_2} = T_2^2 + \frac{l_1}{l_1 - l_2} (T_1 + T_2)(T_1 - T_2). \quad (4.9)$$

3. Рекомендуемое задание к работе

Порядок проведения эксперимента по определению ускорения свободного падения g с помощью оборотного маятника:

1. Подготовить установку для измерений:

а) подключить фотодатчик в разъем, расположенный на задней панели модуля измерительного;

б) с помощью сетевого кабеля подключить модуль измерительный к сети переменного тока 220 В 50 Гц;

в) клавишный выключатель питания «ВКЛ» перевести в положение «I – Включено»; при этом загорится индикатор наличия сетевого напряжения «СЕТЬ»; также загорится индикатор фотоэлемента и на цифровом индикаторе модуля измерительного высветится символ ноль;

г) при помощи кнопки «РЕЖИМ» вывести на экран секундомера «РЕЖИМ 5» и нажать кнопку «ПУСК», при этом экран секундомера перейдет к ожиданию выполнения эксперимента, на цифровом индикаторе будет отображаться число полных колебаний маятника;

д) подвесить оборотный (физический) маятник на стальные ролики планки верхней;

е) отрегулировать высоту установки фотодатчика так, чтобы нижняя часть стержня маятника пересекала луч фотоэлемента.

2. Определить период колебаний T_1 маятника при подвесе на призме Π_1 :

а) привести маятник в колебательное движение с угловой амплитудой 4–5°;

б) после нескольких периодов колебаний маятника нажать кнопку «ПУСК» начнется отсчет времени числа полных колебаний маятника (на цифровом индикаторе при этом будет отображаться число полных колебаний маятника);

в) результаты измерения времени $t_i^{\Pi_1}$ и числа $N = 10$ полных колебаний записать в таблицу.

Опыт повторить 5 раз, вычислить среднее время

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 t_i^{\Pi_1}$$

и по формуле $T_1 = \frac{\bar{t}_1}{N}$ определить период одного полного колебания маятника на первой призме Π_1 .

3. Определить период колебаний T_2 маятника при подвесе на призме Π_2 :

а) Снять маятник с верхней планки, перевернуть его и подвесить на второй призме Π_2 . Привести маятник в колебательное движение с угловой амплитудой 4–5°;

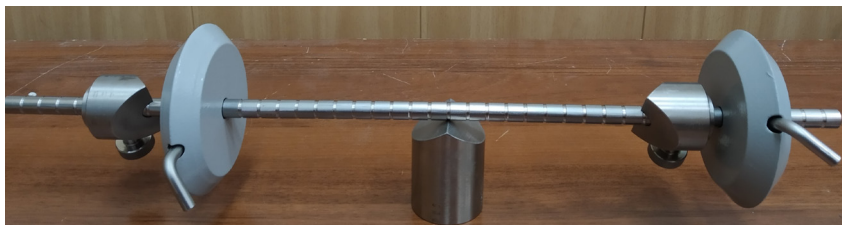


Рис. 4.3. Определение положения центра тяжести оборотного маятника

б) после нескольких периодов колебаний маятника нажать кнопку «ПУСК» начнется отсчет времени числа полных колебаний маятника (на цифровом индикаторе при этом будет отображаться число полных колебаний маятника);

в) результаты измерения времени $t_i^{\Pi_1}$ и числа $N = 10$ полных колебаний записать в таблицу.

Опыт повторить 5 раз, вычислить среднее время

$$\bar{t}_2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 t_i^{\Pi_2}$$

и по формуле $T_2 = \frac{\bar{t}_2}{N}$ определить период одного полного колебания маятника на первой призме Π_1 .

4. Определить положение центра тяжести маятника:

а) снять маятник с верхней планки, горизонтально положить его стержнем на острую грань и уравновесить, слегка придерживая рукой (рис. 4.3);

б) измерить расстояния l_1 и l_2 от точки центра тяжести маятника, находящейся над гранью, до опорных призм Π_1 и Π_2 . Их измерения произвести с помощью масштабной линейки или большого штанге. Для удобства отсчета на стержне маятника через каждые 10 мм выполнены кольцевые насечки.

5. По результатам измерений, пользуясь формулой (4.8), вычислить величину ускорения свободного падения g .

6. Оцените величины случайной и систематической погрешностей результата измерений g .

Контрольные вопросы для допуска к лабораторной работе

1. Сформулируйте цель лабораторной работы.
2. Что такое ускорение, сила и масса? Сформулируйте второй закон Ньютона.

3. Что такое ускорение свободного падения g ? Какие существуют методы измерения g ?
4. Что такое гравиметрические карты? В каких целях используются данные карты?
5. Что называется, моментом инерции тела?
6. Выведите теорему Штейнера.
7. Что такое период и частота колебаний?
8. Что такое физический маятник?
9. Чему равны период колебаний физического маятника и приведенная длина?
10. Опишите устройство обратного маятника?
11. Что такое центр тяжести и центр масс тела?
12. Выведите формулу (4.10) для расчета ускорения свободного падения?
13. Как величина ускорения свободного падения зависит от географической широты местности и высоты над уровнем моря?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Цель работы. Изучить гармонические колебания на примере движения математического маятника. Определить ускорение свободного падения при помощи математического маятника.

1. Описание лабораторной установки

Для проведения лабораторной работы используется установка «Маятник универсальный» (рис. 5.1). Для выполнения работы необходимо перевести фотодатчик Φ_1 в положение для изме-

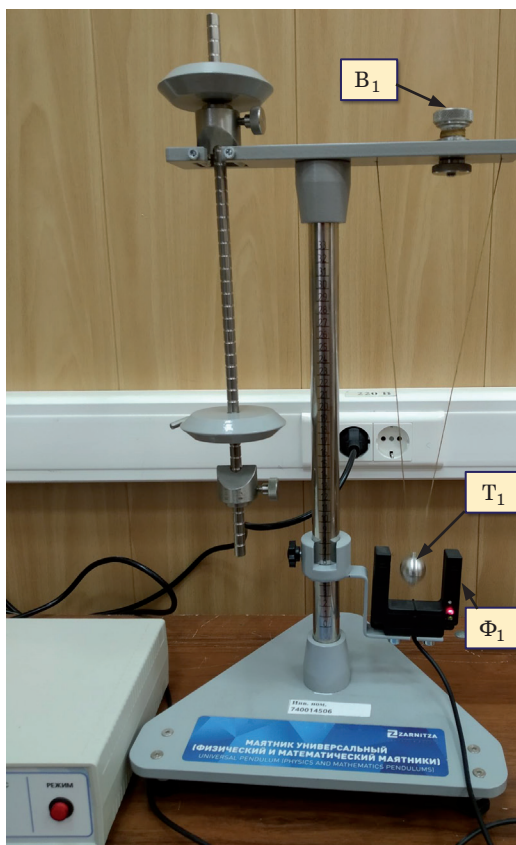


Рис. 5.1. Математический маятник. Используется установка «Маятник универсальный»: B_1 – винт для изменения длины нити маятника; T_1 – шарик; Φ_1 – фотодатчик

рения периода колебания математического маятника. В качестве тела в маятнике используется шарик T_1 . Длина нити регулируется с помощью винта B_1 . Измерение периода колебания производится с помощью универсального электронно-измерительного блока (УЭИБ).

2. Теоретические сведения

Колебания – движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

Колебания представляют собой один из наиболее распространенных видов движений в природе и технике. Колебания могут быть разной природы: механические, электромагнитные, электро-механические и другие.

Свободными или собственными называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы.

Простейшим видом колебаний являются *гармонические* колебания. Это такие колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется по закону синуса (или косинуса). Этот вид колебаний особенно важен, так как многие колебания часто имеют характер, очень близкий к гармоническим колебаниям. Периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

Уравнение гармонических колебаний можно представить в виде:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0); x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.1)$$

Поскольку косинус изменяется в пределах от -1 до $+1$, значения $x(t)$ лежат в пределах от $-A$ до $+A$. Наибольшая величина отклонения от положения равновесия A называется *амплитудой колебаний*. Амплитуда A – постоянная положительная величина $A = |x_{\max}|$. Аргумент косинуса – величина $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$, называется *фазой колебаний*.

Постоянная величина φ_0 представляет собой значение фазы в момент времени $t = 0$ и называется *начальной фазой* колебаний. С изменением начала отсчета времени изменяется и φ_0 . Следовательно, значение начальной фазы определяется выбором начала

отсчета времени. Так как значения $x(t)$ не изменяется при добавлении или вычитании из фазы целого числа 2π , всегда можно добиться того, чтобы начальная фаза была по модулю меньше π . Поэтому обычно рассматриваются только значения φ_0 , лежащие в пределах от $-\pi$ до $+\pi$.

Период гармонического колебания T это такой промежуток времени, за который фаза колебаний получает приращение, равное 2π , т. е. совершается *одно полное колебание*. По истечении времени T , соответствующего периоду колебания, движущаяся точка занимает свое прежнее положение. Следовательно, период колебания T определяется из условия:

$$[\omega_0(t + T) + \varphi_0] - (\omega_0 t + \varphi_0) = 2\pi$$

отсюда:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (5.2)$$

Величина ω_0 – называется *собственной циклической частотой* гармонических колебаний. Значение ω_0 равно числу колебаний за 2π секунд. Величина ν_0 , обратная периоду колебаний – называется *собственной частотой колебаний*

$$\nu_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} . \quad (5.3)$$

В качестве примера колебательного движения, поясняющего физические условия, при которых совершаются гармонические колебания, может служить движение математического маятника.

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на одном конце которой прикреплена масса, сосредоточенная в одной точке.

Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити, при условии, что радиус шарика много меньше длины нити l . Если маятник отклонить от положения равновесия на небольшой угол α (α – угол, образованный нитью с вертикалью) и отпустить его, то маятник начнет совершать колебательное движение (рис. 5.2а).

Получить уравнение колебаний математического маятника можно исходя из закона сохранения энергии. Поскольку маятник

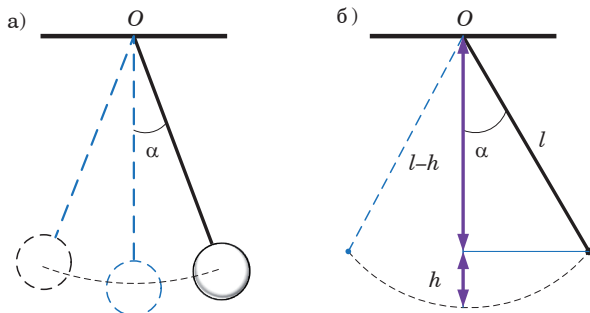


Рис. 5.2. Математический маятник

совершает только вращательное движение с угловой скоростью ω в поле действия силы тяжести, то можно записать:

$$\frac{J\omega^2}{2} + mgh = \text{const}, \quad (5.4)$$

где J – момент инерции маятника; m – масса маятника; h – высота подъема груза.

Используя геометрические построения, выполненные на рис. 5.2б, получим следующие выражения:

$$l \cos \alpha = l - h \Rightarrow h = l(1 - \cos \alpha).$$

Разложим в ряд до второго члена $\cos(\alpha)$ и подставим в предыдущее выражение:

$$h = l \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} \right) \right) = l \frac{\alpha^2}{2}.$$

Перепишем выражение (5.4), продифференцировав части равенства по t :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{J\omega^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{mgl\alpha^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} (\text{const}).$$

Упростив, получим:

$$J\omega \frac{d\omega}{dt} + mgl\alpha \frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Учитывая, что $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$, получим:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0, \quad (5.5)$$

так как для математического маятника $J = ml^2$, и обозначив $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ получим:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0. \quad (5.6)$$

Решением данного дифференциального уравнения является функция:

$$\alpha = \alpha_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (5.7)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – собственная циклическая частота колебаний математического маятника; α_{\max} – максимальное значение α ; φ_0 – начальная фаза.

Убедиться в справедливости решения (5.7) можно путем непосредственной подстановки его в уравнение (5.6).

Из предыдущего выражения вытекает, что собственная циклическая частота колебаний математического маятника зависит только от длины маятника и ускорения свободного падения. Учитывая связь между собственной циклической частотой математического маятника и периодом колебаний, получим выражение для периода:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5.8)$$

Таким образом, зная величину l и измерив T , можно найти ускорение свободного падения.

3. Методика эксперимента

Определить ускорения свободного падения с помощью математического маятника на практике лучше графическим методом. Для этого необходимо по полученным экспериментальным данным построить график зависимости квадрата периода колебаний маятника от длины нити $T^2 = f(l)$ (рис. 5.3).

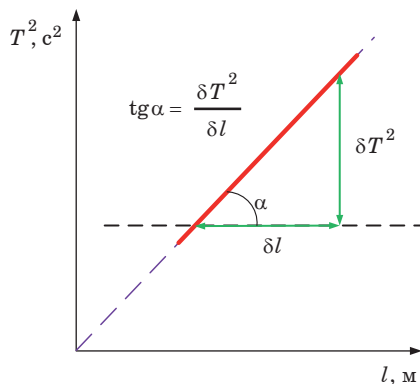


Рис. 5.3. График зависимости T^2 от l

По тангенсу угла наклона полученного графика к оси T^2 можно определить среднюю величину ускорения свободного падения g .

$$g = (2\pi)^2 \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = (2\pi)^2 \frac{\delta l}{\delta(T^2)}. \quad (5.9)$$

где δl и δT^2 – приращения графика функции $T^2 = f(l)$ по соответствующим осям (рис. 5.3).

В реальной лабораторной установке груз – это не материальная точка и, следовательно, точное определение длины подвеса невозможно. Поскольку для определения g требуется нахождение приращений δl и δT^2 , то можно перенести начало координат 0 в точку l_0 и измерять изменение длины Δl относительно l_0 на каждом шаге измерений. Таким образом, построив график зависимости $T^2 = f(\Delta l)$ можно найти значение ускорения свободного падения по формуле:

$$g = (2\pi)^2 \frac{\delta(\Delta l)}{\delta(T^2)}. \quad (5.10)$$

Достоинством этого метода является то, что он позволяет исключить систематическую ошибку в определении длины подвеса.

4. Порядок получения и обработка результатов эксперимента

1. Подключить фотодатчик в разъем, расположенный на задней панели универсального электронно-измерительного блока (УЭИБ).

2. С помощью сетевого кабеля подключить УЭИБ к сети переменного тока 220 В 50 Гц.

3. Клавишный выключатель питания «ВКЛ» перевести в положение «I – Включено»; при этом загорится индикатор наличия сетевого напряжения «СЕТЬ»; также загорится индикатор фотоэлемента и на цифровом индикаторе модуля измерительного высветится символ ноль.

4. При помощи кнопки «РЕЖИМ» вывести на экран секундомера «РЕЖИМ 5» и нажать кнопку «ПУСК», при этом экран секундомера перейдет к ожиданию выполнения эксперимента, на цифровом индикаторе будет отображаться число полных колебаний маятника.

5. Выставить первую длину l_1 нити. Отрегулировать высоту установки фотодатчика так, чтобы нижняя часть маятника пересекла луч фотоэлемента.

6. Привести маятник в колебательное движение с угловой амплитудой 10-15°;

7. После нескольких периодов колебаний маятника нажать кнопку «ПУСК» начнется отсчет времени числа полных колебаний маятника (на цифровом индикаторе при этом будет отображаться число полных колебаний маятника);

8. Результаты измерения времени t_i и числа $N = 10$ полных колебаний записать в таблицу.

9. Опыт повторить по 5 раз ($i=5$) для 7 разных длин маятника l_m , вычислить значения среднего времени $\bar{t}_m = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 t_i$, и по формуле $T_m = \frac{\bar{t}_m}{N}$ определить периоды одного полного колебания маятника для каждого значения l_m .

10. По результатам измерений построить график функции $T^2=f(\Delta l)$.

11. По формуле (5.10) на линейном участке найти приращение функций и рассчитать $-g$. Сравнить полученный результат с теоретическим ($g_T=9,8195\text{м/с}^2$).

Контрольные вопросы для допуска к лабораторной работе

1. Дайте определение колебательного процесса.
2. Какие колебания называются гармоническими?
3. Выведите дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

4. Что называется математическим маятником?
5. Что называется угловым ускорением?
7. Получите формулу для круговой частоты и периода колебаний физического маятника.
12. Как найти период и частоту колебаний математического маятника?
13. Выведите формулу (5.10).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6. ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Цель работы. Изучить гармонические колебания на примере движения физического маятника. Определить момент инерции физического маятника методом колебаний.

1. Описание лабораторной установки

Для выполнения лабораторной работы используется комплект специализированного лабораторного оборудования «Механика-1».

Лабораторная установка, подготовленная для выполнения лабораторной работы № 6 изображена на рис. 6.1. В качестве физического маятника используется длинный металлический стержень C_1 , на который крепятся дополнительные грузы Γ_1 и Γ_2 . Измерение периода колебания маятника производится с помощью фотодатчи-

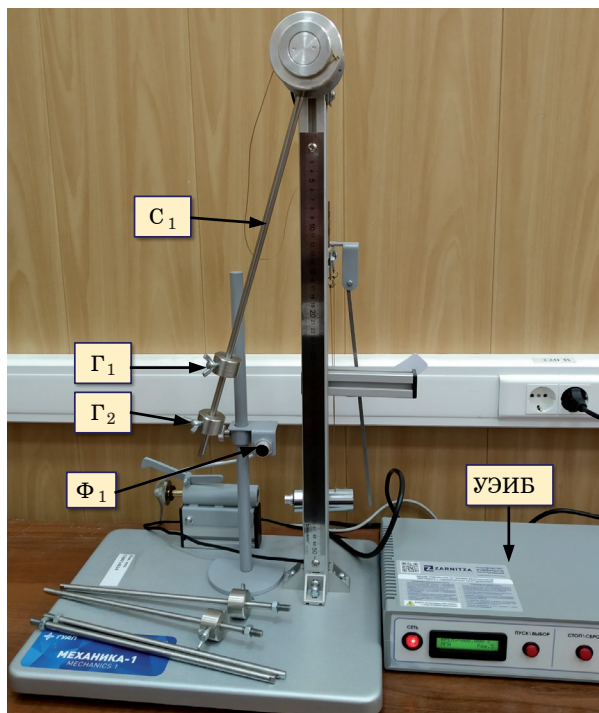


Рис. 6.1. Комплект специализированного лабораторного оборудования «Механика-1», подготовленный к выполнению лабораторной работы № 6 «Физический маятник»: C_1 – металлический стержень; Γ_1 и Γ_2 – дополнительные грузы; Φ_1 – фотодатчик

ка Φ_1 , подключенного к универсальному электронно-измерительному блоку (УЭИБ).

2. Теоретические сведения

Для знакомства с теоретическими сведениями по данной лабораторной работе ознакомьтесь со сведениями, представленными в аналогичном разделе лабораторной работы № 5.

В качестве примера колебательного движения, поясняющего физические условия, при которых совершаются гармонические колебания, может служить движение физического маятника.

Физический маятник представляет собой твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести относительно горизонтальной оси O , не проходящей через его центр масс C (рис. 6.2).

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания физического маятника:

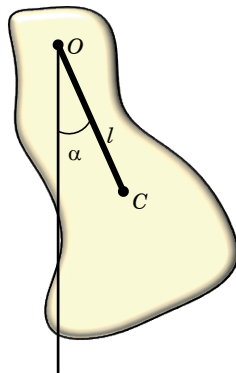


Рис. 6.2. Физический маятник

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0, \quad (6.1)$$

где m – масса маятника; l – расстояние от оси вращения (точка O) до центра масс (точка C); J – момент инерции физического маятника относительно оси вращения.

Обозначив $\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$ получим:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0. \quad (6.2)$$

Решением данного дифференциального уравнения является функция:

$$\alpha = \alpha_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.3)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$ – собственная циклическая частота колебаний математического маятника; α – максимальное значение; φ_0 – начальная фаза.

Убедиться в справедливости решения (6.3) можно путем непосредственной подстановки его в уравнение (6.2).

Учитывая связь между собственной циклической частотой математического маятника и периодом колебаний, получим выражение для периода:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (6.4)$$

3. Методика эксперимента

Рассмотрим физический маятник, схема которого представлена на рис. 6.2. Он состоит барабана массой m_1 , стержня массой m_2 и двух грузов с одинаковыми массами m_3 , которые могут перемещаться вдоль стержня. Вращение маятника происходит относительно оси, проходящей через точку O (рис. 6.3).

Если грузы смещать относительно произвольно выбранной точки A на одинаковые расстояния r , то положение центра масс l (точка C) относительно точки O остается неизменным. При этом момент инерции J такого маятника будет меняться по закону:

$$J = J_A + 2m_3r^2, \quad (6.5)$$

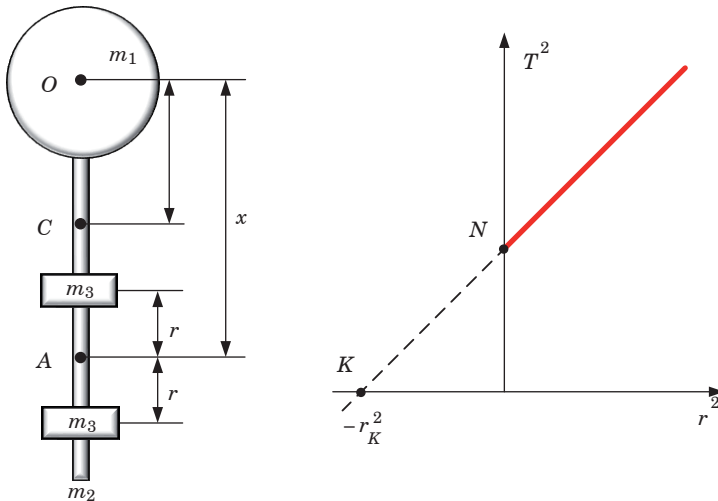


Рис. 6.3. Схема физического маятника. График зависимости T^2 от r^2

где J_A – момент инерции маятника, при положении грузов m_3 в точке А.

Подставим выражение (6.4) в (6.5), и возведем в квадрат.

$$T^2 = \frac{4\pi}{g} \left(\frac{J_A}{Ml} + \frac{2r^2 m_3}{Ml} \right), \quad (6.6)$$

где $M = m_1 + m_2 + 2m_3$ – масса маятника.

Из этого выражения видно, что график функции $T^2 = f(r^2)$ представляет собой функцию типа $y = kx + b$ (рис. 6.3).

Для нахождения момента инерции J_A необходимо полученный график экстраполировать до пересечения с осью r^2 и по точке пересечения K найти значение $-r_K^2$. В этом случае $T^2 = 0$, следовательно, выражение (6.6) можно представить в виде:

$$J_A = 2m_3 r_K^2 \quad (6.7)$$

Для нахождения расстояния от оси вращения до центра масс l необходимо найти значение T_N^2 , соответствующее на графике точке N

$$l = \frac{\pi J_A}{g M T_N^2} \quad (6.8)$$

Пользуясь выражением (6.4) можно экспериментально найти значения момента инерции рассмотренного физического маятника

$$J = \frac{mgl}{4} T^2. \quad (6.9)$$

Порядок получения и обработки результатов эксперимента

1. Снять все стержни с барабана. Установить длинный стержень и симметрично грузы относительно точки А на минимальное расстояние r .

2. Выбрать на УЭИБ «Режим № 3». Вывести маятник из положения равновесия на небольшой угол $5-10^\circ$.

3. Отпустить груз и нажать кнопку «ПУСК\ВЫБОР» секундомера. Период колебаний можно рассчитать по формуле $T_i = T_{\text{изм}}/10$.

4. Постепенно увеличивать расстояние r , и измерить соответствующие периоды колебаний. Провести не менее 5-ти измерений.

5. Построить график зависимости $T^2=f(r^2)$. Убедиться, что полученный график представляет собой линейную функцию. Экстраполировать полученный график до пересечения с осью r^2 . По графику найти точки пересечения с осями r_K^2 и T_N^2 . С помощью выражений (6.7) и (6.8) вычислить значения J_A и l . Построить теоретическую зависимость $-J=f(r^2)$, используя формулу (6.5).

6. Построить практическую зависимость $-J=f(r^2)$, в тех же координатных осях, используя формулу (6.9). Сравнить полученные результаты.

Контрольные вопросы для защиты лабораторной работы

1. Что такое свободные колебания?
2. Что такое вынужденные колебания?
3. Какие колебания называются гармоническими?
4. Дайте определение периода, циклической частоты, амплитуды и начальной фазы свободных незатухающих колебаний.
5. Что такое математический маятник?
6. Что такое физический маятник?
7. Напишите дифференциальное уравнение, описывающее свободные колебания физического маятника в отсутствии затухания и при наличии сил вязкого трения.
8. Напишите решение дифференциального уравнения, описывающего свободные колебания физического маятника в отсутствии затухания и при наличии сил вязкого трения.
9. От чего зависит период колебаний физического маятника?
10. Что называется, приведенной длиной физического маятника?
11. Докажите теорему Штейнера.
12. Выведите формулы (6.6), (6.8) и (6.9).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе выполнения лабораторных работ в рамках лабораторного практикума «Кинематика и динамика движения маятников» студенты делают шесть работ. Данные работы тесно связаны с таким фундаментальным законом, как закон сохранения энергии. Движение различных видов маятников тесно связано с кинематикой и динамикой движения абсолютно твердого тела.

Студенты на практике знакомятся с моментом инерции и теоремой Штейнера, учатся описывать движение колебательных систем с помощью дифференциальных уравнений.

Анализ колебательных процессов показал, что между колебаниями разной физической природы очень много общего. Конкретные колебательные системы, с которыми приходится иметь дело специалистам в технике, совершенно различны, однако колебательно-волновые явления и процессы, в них происходящие, подчиняются общим закономерностям и описываются едиными колебательными моделями.

Знание основ физики колебаний совершенно необходимо для пополнения теоретического багажа инженера любого профиля, поэтому данный лабораторный практикум необходим для реализации курса физики в техническом университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Савельев, И. В.* Курс общей физики. В 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика: учебник для вузов / И. В. Савельев. – 18-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2022. – 436 с. Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/221120> (дата обращения: 27.02.2023). – Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. *Савельев, И. В.* Курс физики. В 3 т. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика: учеб. пособие для вузов / И. В. Савельев. – 7-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2022. – 468 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/184164> (дата обращения: 02.04.2023). – Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. *Стрелков, С. П.* Механика: учебник / С. П. Стрелков. – 6-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2022. – 560 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/206291> (дата обращения: 27.02.2023). – Режим доступа: для авториз. пользователей.

4. *Зисман, Г. А.* Курс общей физики. В 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. Колебания и волны / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2023. – 340 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/320777> (дата обращения: 27.02.2023). – Режим доступа: для авториз. пользователей.

5. *Бондарев, Б. В.* Курс общей физики в 3 кн. Кн. 1: механика: учебник для бакалавров / Б. В. Бондарев, Н. П. Калашников, Г. Г. Спирин. – М.: Изд-во Юрайт, 2022. – 353 с. – (Бакалавр. Академический курс). – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/509098> (дата обращения: 27.02.2023).

6. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики: учеб. пособие для вузов: В 5 т. Т. 1: Механика / Д. В. Сивухин. – 6-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 560 с. – Текст: электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/470189> (дата обращения: 27.04.2023). – Режим доступа: по подписке.

7. Механика. Молекулярная физика. Теплота: учеб.-метод. пособие / Ю. А. Новикова, Г. В. Терещенко. – СПб.: ГУАП, 2021. – 123 с.

8. *Паршаков, А. Н.* Физика колебаний: учеб. пособие / А. Н. Паршаков. – Пермь: ПНИПУ, 2010. – 302 с. – Текст: электронный // СПб.: Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/184164>

lanbook.com/book/160911 (дата обращения: 02.04.2023). – Режим доступа: для авториз. пользователей.

9. *Фриш, С. Э.* Курс общей физики: учебник: в 3 т. / С. Э. Фриш, А. В. Тиморева. – 13-е изд. – Санкт-Петербург: Лань, 2022 – Т. 1: Физические основы механики. Молекулярная физика. Колебания и волны – 2022. – 480 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210377> (дата обращения: 02.04.2023). – Режим доступа: для авториз. пользователей.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Лабораторная работа № 1. Маятник Максвелла. Определение момента инерции тел и проверка закона сохранения энергии ...	6
Лабораторная работа № 2. Исследование динамики вращательного движения маятника Обербека	13
Лабораторная работа № 3. Определение момента инерции тела вращения и оценка момента сил трения.....	25
Лабораторная работа № 4. Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника.....	32
Лабораторная работа № 5. Математический маятник.....	41
Лабораторная работа № 6. Физический маятник.....	49
Заключение	54
Список литературы.....	55

Учебное издание

Новикова Юлиана Александровна,
Терещенко Георгий Викторович

**КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА
ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКОВ**

Лабораторный практикум

Публикуется в авторской редакции
Компьютерная верстка *А. Н. Колешко*

Подписано к печати 28.06.2023. Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. 3,4. Уч.-изд. л. 3,5.

Тираж 50 экз. Заказ № 285.

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А