МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

МЕХАНИКА.
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.
ТЕРМОДИНАМИКА

Сборник задач

ГУАП
Санкт-Петербург
2018

Составители: И. И. Коваленко, Е. Н. Котликов, Н. П. Лавровская, Ю. А. Новикова, В. К. Прилипко, Е. В. Рутьков, Ю. Н. Царев / Под редакцией Ю. Н. Царева, Н. П. Лавровской

Рецензент – кандидат физико-математических наук *В. А. Елохин*

Включены задачи по следующим разделам физики: механика, колебания и волны, термодинамика. По материалам сборника составляются домашние задания для студентов, изучающих физику в течение трех семестров.

По сравнению с изданием 2010 года в настоящем сборнике изменено разделение на темы, дополнены теоретические сведения, добавлены задачи таким образом, что во всех разделах стало по 30 задач. Общее количество задач, включенных в сборник – 360.

В конце сборника задач размещены справочные материалы и список рекомендованной литературы.

Публикуется в авторской редакции.
Компьютерная верстка *Н. Н. Караваевой*

Сдано в набор 28.12.18. Подписано к печати 30.12.18. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 3,9. Тираж 50 экз. Заказ № 644.

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67

© Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2018

МЕХАНИКА

1. Кинематика

Теоретические сведения

Положение материальной точки (частицы) задается радиус-вектором $\vec{r}$. В декартовой системе координат

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}, \tag{1.1}$$

где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – орты осей x, y, z; $x(t), y(t), z(t)$ – проекции $\vec{r}(t)$ на ось координат. Зависимость x, y, z от времени называется уравнениями движения частицы по осям координат.

Вектор мгновенной скорости – производная по времени от перемещения

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.2}$$

Модуль численного значения скорости v и проекции вектора скорости на оси координат определяются соотношениями

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{1.3}$$

Мгновенное ускорение и проекции ускорения на оси координат определяется формулами

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{1.4}$$

При плоском криволинейном движении по траектории радиуса кривизны R ускорение можно представить в виде суммы двух перпендикулярных составляющих

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \tag{1.5}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \qquad (1.6)$$

Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ направлено по нормали к траектории к центру кривизны. Касательное ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к траектории. Направление $\vec{a}_\tau$ совпадает по направлению с вектором скорости $\vec{v}(t)$ для ускоренного движения (УД), и противоположно $\vec{v}(t)$ для замедленного движения (ЗД).

Для прямолинейного равномерного движения частицы ($v = \text{const}$) вдоль оси x уравнение движения имеет вид

$$x(t) = x_0 + v_x t, \qquad (1.7)$$

где x_0 – начальная координата.

Для равнопеременного движения ($a = \text{const}$) вдоль оси x зависимость координаты $x(t)$ и проекции скорости $v_x(t)$ от времени имеет вид

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad v_x = v_{0x} + a_x \cdot t, \qquad (1.8)$$

где v_{0x} и a_x – проекции векторов $\vec{v}_0$ и $\vec{a}$ на ось x.

Для этого типа движения также справедливы формулы

$$v = v_0 + a \cdot t, \quad S = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad 2aS = v^2 - v_0^2, \qquad (1.9)$$

где знак (+) относится к УД, а знак (-) к ЗД.

Заметим, что формулы (1.9) можно применять к криволинейному равнопеременному движению ($a_\tau = \text{const}$), заменив a на a_τ.

Для вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси или движения материальной точки по окружности урав нением движения является зависимость угла поворота от времени $\vec{\varphi}(t)$

Вращательное движение характеризуется угловой скоростью и угловым ускорением

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad \vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \qquad (1.10)$$

Векторы угла поворота и угловой скорости направлены вдоль оси вращения по правилу правого винта. Вектор углового ускорения направлен так же, как угловая скорость при ускоренном движении, и в противоположную сторону – при замедленном вращении.

Для равномерного вращательного движения зависимость $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \qquad (1.11)$$

где φ_0 – начальное угловое перемещение.

Для равнопеременного вращательного движения ($\beta = \text{const}$) уравнение имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}. \qquad (1.12)$$

Частота вращения

$$\nu = N / t, \qquad (1.13)$$

где N –число оборотов, совершаемых телом за время t.

Угловая скорость при равнопеременном движении

$$\omega = \omega_0 + \beta t. \qquad (1.14)$$

Задачи

1.1. Самолет летит из пункта A к пункту B, расположенному на расстоянии 300 км к востоку. Определить продолжительность полета, если: 1) ветра нет, 2) ветер дует с севера на юг, 3) ветер дует с запада на восток. Скорость ветра 20 м/с, скорость самолета относительно воздуха 600 км/ч.

1.2. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через 3 с. 1) Какова была начальная скорость тела? 2) На какую высоту поднялось тело? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.3. С аэростата, находящегося на высоте 300 м, упал камень. Через сколько времени камень достигнет земли, если: 1) аэростат поднимается со скоростью 5 м/с, 2) аэростат опускается со скоростью 5 м/с, 3) аэростат неподвижен? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.4. Свободно падающее тело в последнюю секунду падения проходит половину своего пути. Найти: 1) с какой высоты падает тело, 2) продолжительность его падения.

1.5. Расстояние между двумя станциями метрополитена 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую – равнозамедленно. Максимальная скорость поезда 50 км/ч. Найти: 1) величину ускорения, считая его численно равным замедлению, 2) время движения поезда между станциями.

1.6. Вагон движется равнозамедленно ($a = 0{,}5$ м/с^2). Начальная скорость вагона 54 км/ч. Через сколько времени и на каком расстоянии от начальной точки вагон остановится?

1.7. Зависимость пройденного телом пути от времени дается уравнением $s = At + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 2$ м/с, $B = 3$ м/с^2 и $C = 4$ м/с^3. Найти: 1) зависимость скорости и ускорения от времени, 2) расстояние, пройденное телом, скорость и ускорение тела через 2 с после начала движения. Построить график пути, скорости и ускорения для $0 \le t \le 3\,c$ через 0,5 с.

1.8. Зависимость пройденного телом пути от времени дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2$, где $A = 6$ м, $B = 3$ м/с и $C = 2$ м/с^2. Найти среднюю скорость и среднее ускорение тела в интервале времени от 1 с до 4 с. Построить график пути, скорости и ускорения для $0 \le t \le 5\,c$ через 1 с.

1.9. С башни высотой 25 м горизонтально брошен камень со скоростью 15 м/с. Найти: 1) сколько времени камень будет в движении; 2) на каком расстоянии от основания башни он упадет на землю; 3) с какой скоростью он упадет на землю; 4) какой угол составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.10. Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через 0,5 с на расстоянии 5 м по горизонтали от места бросания. 1). С какой высоты был брошен камень? 2). С какой начальной скоростью он был брошен? 3). С какой скоростью он упал на землю? 4). Какой угол составляет траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.11. Камень брошен горизонтально со скоростью 15 м/с. Найти нормальное и тангенциальное ускорение камня через 1 с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.12. Мяч бросили со скоростью 10 м/с под углом 40° к горизонту. Найти: 1) на какую высоту поднимется мяч, 2) на каком расстоянии от места бросания мяч упадет на землю, 3) сколько времени он будет в движении. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.13. С башни высотой 25 м бросили камень со скоростью 15 м/с под углом 30° к горизонту. Найти: 1) время полета камня, 2) на каком расстоянии от основания башни он упадет на землю, 3) с какой скоростью он упадет на землю. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.14. Ось с двумя дисками, расположенными на расстоянии 0,5 м друг от друга, вращается с угловой скоростью, соответствующей частоте 1600 об/мин. Пуля, летящая вдоль оси, пробивает оба диска; при этом отверстие от пули во втором диске смещено относительно отверстия в первом диске на угол 12°. Найти максимальную скорость пули.

1.15. Маховое колесо через 1 мин после начала вращения приобретает скорость, соответствующую 720 об/мин. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов колеса за эту минуту. Движение считать равноускоренным.

1.16. Найти угловое ускорение колеса, если известно, что через 2 с после начала равноускоренного движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол 60° с направлением линейной скорости этой точки.

1.17. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением 2 рад/с^2. Через 0,5 с после начала движения полное ускорение колеса стало равно 13,6 м/с^2. Найти радиус колеса.

1.18. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с^2 и $D = 1$ рад/с^3. Найти радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, равно $3{,}46 \cdot 10^2$ м/с^2.

1.19. Тело брошено под некоторым углом к горизонту. Найти этот угол, если горизонтальная дальность полета тела в четыре раза больше максимальной высоты траектории.

1.20. Снаряд, выпущенный из орудия под углом 30° к горизонту, дважды был на одной и той же высоте h спустя 10 с и 50 с после выстрела. Определить начальную скорость и высоту h.

1.21. Самолет, летевший на высоте 2940 м со скоростью 360 км/ч, сбросил бомбу. За какое время t до прохождения над целью и на каком расстоянии s от нее должен самолет сбросить бомбу, чтобы попасть в цель? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.22. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении с начальной скоростью 30 м/с. Определить скорость, тангенциальное и нормальное ускорение камня в конце второй секунды после начала движения.

1.23. Линейная скорость точек на окружности вращающегося диска равна 3 м/с. Точки, расположенные на 10 см ближе к оси, имеют линейную скорость 2 м/с. Определить частоту вращения диска.

1.24. Диск радиусом 20 см вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3$ рад, $B = -1$ рад/с, $C = 0{,}1$ рад/с^3. Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорение точек на окружности диска для момента времени $t = 10$ с.

1.25. Маховик начал вращаться равноускоренно и за время 10 с достиг скорости, соответствующей 300 об/мин. Определить угловое ускорение маховика и число оборотов, которое он сделал за это время.

1.26. В момент $t=0$ частица вышла из начала координат в положительном направлении оси x. Ее скорость меняется со временем по закону $\upsilon=\upsilon_0\left(1-\frac{t}{\tau}\right)$, где υ_0 – начальная скорость, модуль которой 10,0 см/с, $\tau=5{,}0$ с. Найти: а) координату x частицы в моменты времени 6,0 с, 10 с и 20 с; б) моменты времени, когда частица будет находиться на расстоянии 10,0 см от начала координат.

1.27. Под каким углом к горизонту надо бросить шарик, чтобы: а) радиус кривизны начала его траектории был в 8 раз больше, чем в вершине; б) центр кривизны вершины траектории находился на земной поверхности?

1.28. Точка движется по окружности со скоростью $\upsilon=at$, где $\alpha=0{,}50$ м/с^2. Найти ее полное ускорение в момент, когда она пройдет 0,10 длины окружности после начала движения.

1.29. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол его поворота зависит от времени как $\varphi=\beta t^2$, где $\beta=0{,}20$ рад/с^2. Найти полное ускорение точки на ободе колеса в момент 2,5 с, если скорость ее в этот момент 0,65 м/с.

1.30. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta=\alpha t^2$, где $\alpha=2\cdot10^{-2}$ рад/с^3. Через сколько времени после начала движения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол 60° с ее вектором скорости?

2. Динамика поступательного движения

Теоретические сведения

Основными законами динамики являются законы Ньютона. Первый закон Ньютона (закон инерции) выделяет из всех систем отсчета инерциальные системы отсчета (ИСО).

Второй закон Ньютона является основным уравнением динамики материальной точки. В ИСО он имеет вид

$$m\vec{a}=\vec{F},\quad m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F},\quad \textit{или}\quad \frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}, \tag{2.1}$$

где m–масса тела, $\vec{F}$ – результирующая сила, $\vec{p}=m\vec{\upsilon}$ – импульс тела.

Для замкнутой системы тел справедлив закон сохранения импульса: сумма импульсов N частиц есть величина постоянная:

$$\sum_{i-1}^{N}\vec{P}_i=\text{const}\quad\text{или}\quad\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{\upsilon}_i=\text{const}. \tag{2.2}$$

Задачи

2.1. Материальная точка массой 1 кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиуса 1,2 м в течение 2 с. Найти модуль вектора изменения импульса точки за это время.

2.2. Тело массой 5 кг брошено под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 20 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: 1) импульс силы, действующей на тело за время полета, 2) модуль вектора изменения импульса тела за время полета.

2.3. Шарик массой 100 г упал с высоты 2,5 м на горизонтальную плиту, масса которой много больше массы шарика, и отскочил от нее вверх. Считая удар абсолютно упругим, найти импульс, полученный плитой.

2.4. Шарик массой 0,3 кг ударился о стену и отскочил от нее. Определить импульс, полученный стеной, если в последний момент перед ударом шарик имел скорость 10 м/с, направленную под углом 30° к поверхности стены. Удар считать абсолютно упругим.

2.5. Шарик массой 0,1 кг соскальзывает без трения по желобу высотой 2 м. Начальная скорость шарика равна нулю. Найти модуль вектора изменения импульса шарика и импульс, полученный желобом при движении шарика.

2.6. При равномерном движении по окружности со скоростью $\upsilon=10$ м/с тело массой $m=2$ кг переместилось на угол $\varphi=120°$. Найти модуль вектора изменения импульса тела.

2.7. Железнодорожная платформа массой $M=20$ т движется со скоростью $\upsilon_1=9$ км/ч. Из орудия, установленного на платформе, выпущен снаряд массой $m=25$ кг со скоростью $\upsilon_2=700$ м/с относительно орудия. Определить скорость платформы после выстрела в двух случаях: 1) когда выстрел произведен в направлении движения платформы, 2) когда выстрел произведен в противоположном направлении. Трением платформы о рельсы пренебречь.

2.8. Граната, летевшая со скоростью $\upsilon=10$ м/с, разорвалась на два осколка. Больший осколок, масса которого составляла 60% массы всей гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении со скоростью $\upsilon_1=25$ м/с. Найти скорость меньшего осколка.

2.9. Шар массой 10 кг, движущийся со скоростью 4 м/с, сталкивается с шаром массой 4 кг, движущимся со скоростью 12 м/с. Считая удар прямым и неупругим, найти скорость шаров после удара в двух случаях: 1) малый шар нагоняет большой шар; 2) шары движутся навстречу друг другу.

2.10. В лодке массой 240 кг стоит человек массой 60 кг. Лодка движется со скоростью 2 м/с. Человек прыгает с лодки в горизонтальном направлении со скоростью 4 м/с (относительно лодки). Найти скорость движения лодки после прыжка человека в двух случаях: 1) человек прыгает вперед по движению лодки; 2) человек прыгает в сторону, противоположную движению лодки.

2.11. Два конькобежца массами 80 кг и 50 кг, держась за концы длинного натянутого шнура, неподвижно стоят на льду один против другого. Один из них начинает укорачивать шнур, выбирая его со скоростью 1 м/с. С какими скоростями будут двигаться по льду конькобежцы? Трением пренебречь.

2.12. Частица 1 столкнулась с частицей 2, в результате чего возникла составная частица. Найти вектор скорости и абсолютное значение скорости новой частицы, если $m_2 = 2m_1$, а их скорости перед столкновением равны $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{v}_2 = 5\vec{i} - 3\vec{j}$ (компоненты скорости даны в м/с).

2.13. Ствол пушки направлен под углом 45° к горизонту. Когда колеса пушки закреплены, скорость снаряда, масса которого в 50 раз меньше массы пушки, равна 180 м/с. Найти скорость пушки сразу после выстрела, если колеса ее освободить.

2.14. Снаряд массой 5 кг, вылетевший из орудия, в верхней точке траектории имеет скорость 300 м/с. В этой точке он разорвался на два осколка, больший осколок массой 3 кг полетел в обратном направлении со скоростью 100 м/с. Определить скорость второго, меньшего осколка.

2.15. Снаряд, вылетевший из орудия со скоростью v_0, разорвался на два осколка в верхней точке траектории на расстоянии l (по горизонтали) от места выстрела. Один из осколков полетел в обратном направлении со скоростью движения снаряда до разрыва. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на каком расстоянии s (по горизонтали) от орудия упадет второй осколок.

2.16. Платформа с песком общей массой $M = 2$ т стоит на рельсах на горизонтальном участке пути. В песок попадает снаряд массой $m = 8$ кг и застревает в нем. Пренебрегая трением, определить, с какой скоростью будет двигаться платформа, если в момент попадания скорость снаряда $v = 450$ м/с, а ее направление – сверху вниз под углом 30° к горизонту.

2.17. Снаряд в верхней точке траектории на высоте $h = 100$ м разорвался на две части: $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг. Скорость снаряда в этой точке, была $v_0 = 100$ м/с. Скорость большего осколка v_2 оказалась горизонтальной, совпадающей по направлению с v_0, и равной 250 м/с. Определить расстояние между точками падения обоих осколков. Сопротивление воздуха не учитывать.

2.18. Материальная точка массой $m = 0{,}1$ кг, двигаясь равномерно, описывает половину окружности радиуса $R = 1$ м за 5 с. Найти модуль вектора изменения импульса точки за это время.

2.19. Шарик массой $m = 0{,}2$ кг ударился о стену и отскочил от нее. Определить модуль вектора изменения импульса шарика, если в последний момент перед ударом шарик имел скорость $v = 10$ м/с, направленную под углом 30° к поверхности стенки. Удар считать абсолютно упругим.

2.20. Снаряд, вылетевший из орудия под некоторым углом к горизонту, в верхней точке траектории разрывается на два осколка равной массы. Один осколок возвращается к орудию по прежней траектории. На каком расстоянии от места, где должен был бы упасть снаряд, упадет второй осколок?

2.21. Снаряд массой 10 кг обладал скоростью 200 м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая часть массой 3 кг получила скорость 400 м/с в прежнем направлении. Найти скорость второй части после взрыва.

2.22. На железнодорожной платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием $M = 5$ т. Орудие стреляет вверх под углом $\varphi = 60°$ к горизонту в направлении железнодорожного пути. С какой скоростью v_1 покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда $m = 20$ кг, и он вылетает со скоростью $v_2 = 600$ м/с?

2.23. Снаряд массой 10 кг имел скорость 200 м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая часть с массой 3 кг полетела вперед под углом 60° к горизонту, получив начальную скорость 400 м/с. С какой скоростью и под каким углом к горизонту полетит больший осколок?

2.24. Тележка, масса которой $M = 12$ кг, движется по инерции по горизонтальной плоскости со скоростью $v = 6$ м/с. С тележки соскакивает человек массой $m = 80$ кг под углом $\varphi = 30°$ к направлению ее движения в горизонтальной плоскости. Скорость тележки уменьшается до $v_1 = 5$ м/с. Какова была скорость человека во время прыжка относительно земли?

2.25. Тело массой m_1, движущееся со скоростью v, налетает на покоящееся тело и после упругого соударения отскакивает от него

под углом 90° к первоначальному направлению своего движения со скоростью $v_1 = v/2$. Определить массу второго тела.

2.26. Частица движется вдоль оси x по закону $x = at^2 - bt^3$, где a и b – положительные постоянные. В момент $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F. Найти значения силы в точках поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$.

2.27. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол 15° с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в 2 раза меньше времени спуска.

2.28. Шайбу положили на наклонную плоскость и сообщили направленную вверх начальную скорость v_0. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью равен k. При каком значении угла наклона шайба пройдет вверх по плоскости наименьшее расстояние? Чему оно равно?

2.29. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайнем и нижнем положениях равны по модулю друг другу. Найти угол отклонения нити в крайнем положении.

2.30. Частица массы m движется по окружности радиуса R с нормальным ускорением, которое меняется со временем по закону $a_n = \alpha t^2$, где α – постоянная. Найти зависимость от времени мощности всех сил, действующих на частицу, а также среднее значение этой мощности за первые t секунд после начала движения.

3. Энергия. Работа. Мощность

Теоретические сведения

Механическое движение тела или системы тел характеризуют кинетической $E_к$, потенциальной $E_п$ и полной энергией E, равной сумме $E_к$ и $E_п$.

Все перечисленные виды энергии связаны с работой. Изменение кинетической энергии тела или системы тел равно работе всех сил, действующих на тело или систему

$$E_{к2} - E_{к1} = A_{12}. \qquad (3.1)$$

Убыль потенциальной энергии системы, в которой действуют консервативные силы (КС), равна работе этих сил

$$E_{п1} - E_{п2} = A_{12}^{(КС)}. \qquad (3.2)$$

Изменение полной механической энергии системы равно работе внешних (неконсервативных) сил

$$E_1 - E_2 = A_{12}^{(внеш)}. \qquad (3.3)$$

Если внешние силы отсутствуют, то выполняется закон сохранения механической энергии

$$E_2 = E_1, \quad \Delta E = 0. \qquad (3.4)$$

Во всех соотношениях, записанных выше, цифрами 1 и 2 обозначены начальное и конечное состояния тела или системы тел.

Кинетическая энергия материальной точки или тела, движущегося поступательно,

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \qquad (3.5)$$

Потенциальная энергия упруго деформированного тела (пружины)

$$E_п = \frac{kx^2}{2}. \qquad (3.6)$$

Потенциальная энергия тела, находящегося в однородном поле силы тяжести на высоте h,

$$E_п = mgh. \qquad (3.7)$$

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

$$E_{кин} = \frac{I\omega^2}{2}, \qquad (3.8)$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения, ω – угловая скорость тела.

Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без проскальзывания

$$E_{кин} = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}, \qquad (3.9)$$

где v – скорость движения центра масс тела.

Задачи

3.1. Пуля, летящая со скоростью 400 м/с, попадает в вал и проходит до остановки 0,5 м. Определить силу сопротивления вала движению пули, если ее масса равна 24 г.

3.2. Два груза массами 10 кг и 15 кг подвешены на нитях длиной 2 м так, что грузы соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол 60° и отпущен. Определить высоту, на которую поднимутся оба груза после удара. Удар грузов считать неупругим.

3.3. Два неупругих шара массами 2 кг и 3 кг движутся со скоростями соответственно 8 м/с и 4 м/с. Определить увеличение внутренней энергии шаров при их столкновении в двух случаях: 1) меньший шар нагоняет больший; 2) шары движутся навстречу друг другу.

3.4. Шар массой m_1, летящий со скоростью 5 м/с, сталкивается с неподвижным шаром массой m_2. Удар прямой, неупругий. Определить скорость шаров после удара, а также долю кинетической энергии летящего шара, израсходованную на увеличение внутренней энергии этих шаров. Рассмотреть два случая: 1) $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 8$ кг; 2) $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 2$ кг.

3.5. Шар массой $m = 1{,}8$ кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы M. В результате прямого упругого удара шар потерял 0,36 своей кинетической энергии. Определить массу большего шара.

3.6. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров больший шар покоится. В результате прямого удара меньший шар потерял 0,75 своей кинетической энергии. Определить отношение масс шаров.

3.7. Шар массой 200 г, движущийся со скоростью 10 м/с, ударяется о неподвижный шар массой 800 г. Удар прямой, абсолютно упругий. Каковы будут скорости шаров после удара?

3.8. Баба копра массой 400 кг падает на сваю массой 100 кг, вбитую в грунт. Определить среднюю силу сопротивления грунта, если известно, что при каждом ударе свая погружается в грунт на 5 см, а высота подъема копра 1,5 м. Удар неупругий.

3.9. Небольшое тело начинает скользить с высоты h по наклонному желобу, переходящему в полуокружность радиуса $h/2$. Пренебрегая трением, найти скорость тела в наивысшей точке его траектории (после отрыва от желоба).

3.10. Велосипедист должен проехать по «чертову колесу», радиус которого 8 м. С какой высоты велосипедист должен начать разбег, чтобы не упасть в верхней точке колеса?

3.11. Тело массой m соскальзывает с горы высотой h и останавливается. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять тело обратно на гору?

3.12. Небольшое тело начинает скользить с вершины гладкой сферы радиуса R. Найти угол между вертикалью и радиус-вектором, характеризующим положение тела относительно центра сферы в момент отрыва от нее, а также скорость тела в этот момент.

3.13. Вагон массой $m = 12$ т двигался со скоростью $v = 1$ м/с. Налетев на пружинный буфер, он остановился, сжав пружину буфера на $x = 10$ см. Найти жесткость k пружины.

3.14. В пружинном ружье пружина сжата на 20 см. При взводе ее сжали еще на 30 см. С какой скоростью вылетит из ружья стрела массой 50 г, если жесткость пружины равна 120 Н/м?

3.15. При выстреле из пружинного пистолета вертикально вверх пуля массой 15 г поднялась на высоту 7 м. Определить жесткость пружины пистолета, если она была сжата на 10 см. Массой пружины пренебречь.

3.16. С какой скоростью вылетит из пружинного пистолета шарик массой 10 г, если пружина была сжата на 5 см? Жесткость пружины равна 200 Н/м.

3.17. Ящик с песком массой 10 кг удерживается пружиной, жесткость которой 30 Н/см. Пуля массой 10 г, движущаяся со скоростью 500 м/с, попадает в ящик и застревает в нем. Определить, на сколько при этом сожмется пружина.

3.18. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на легком жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в 1000 раз меньше массы шара. Расстояние от точки подвеса стержня до центра шара 1 м. Найти скорость пули, если известно, что стержень с шаром отклонился от удара пули на угол 10°. Удар считать центральным.

3.19. Тонкий прямой стержень длиной 1 м прикреплен к горизонтальной оси, проходящей через его конец. Стержень отклонили на угол 60° от положения равновесия и отпустили. Определить линейную скорость нижнего конца стержня в момент прохождения через положение равновесия.

3.20. Определить линейную скорость центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой 1 м.

3.21. Сколько времени будет скатываться (без скольжения) обруч с наклонной плоскости длиной 2 м и высотой 10 см?

3.22. Однородные цилиндр и шар начинают одновременно скатываться без скольжения с вершины наклонной плоскости. Какой предмет быстрее достигнет основания плоскости?

3.23. Карандаш длиной 15 см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую и линейную скорости будет иметь в конце падения: 1)середина карандаша? 2) верхний его конец? Считать,

что трение настолько велико, что нижний конец карандаша не проскальзывает.

3.24. На какую высоту над поверхностью Земли поднимется ракета, пущенная вертикально вверх, если начальная скорость ракеты равна первой космической скорости?

3.25. Математический маятник (груз малых размеров на легком подвесе длины l) находится в положении равновесия. Какую наименьшую скорость надо сообщить грузу, чтобы он мог совершить полный оборот? Рассмотреть два случая: груз подвешен 1) на жестком стержне и 2) на нерастяжимой нити.

3.26. Два бруска с массами m_1 и m_2, соединенные недеформированной легкой пружинкой, лежат на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между брусками и плоскостью равен k. Какую минимальную постоянную силу нужно приложить в горизонтальном направлении к бруску с m_1, чтобы другой брусок сдвинулся с места?

3.27. Небольшой шарик массы $m = 50$ г прикреплен к концу упругой нити, жесткость которой $k = 63$ Н/м. Нить с шариком отвели в горизонтальное положение, не деформируя нити, и осторожно отпустили. Когда нить проходила вертикальное положение, ее длина оказалась равной 1,5 м, а скорость шарика составила 3,0 м/с. Найти силу натяжения нити в этом положении.

3.28. Гладкий легкий горизонтальный стержень AB может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец A. На стержне находится небольшая муфточка массы m, соединенная невесомой пружинкой длины l с концом A. Жесткость пружинки равна k. Какую работу надо совершить, чтобы эту систему медленно раскрутить до угловой скорости ω?

3.29. Гладкий резиновый шнур, длина которого l и жесткость k, подвешен одним концом к точке O. На другом конце имеется упор. Из точки O начинает падать небольшая муфточка массы m. Пренебрегая массами шнура и упора, найти максимальное растяжение шнура.

3.30. Небольшая шайба массы $m = 5{,}0$ г начинает скользить, если ее положить на шероховатую поверхность полусферы на высоте 60 см от горизонтального основания полусферы. Продолжая скользить, шайба отрывается от полусферы на высоте 25 см. Найти работу сил трения, действующих на шайбу при ее соскальзывании.

4. Динамика вращательного движения

Теоретические сведения

Моментом импульса частицы относительно точки отсчета называют псевдовектор, равный векторному произведению

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \tag{4.1}$$

где $\vec{r}$ – радиус – вектор, связывающий начало отсчета и положение частицы, $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс частицы, m – масса, v – скорость.

Момент импульса частицы в скалярном виде

$$L = mvr\sin(\vec{v},\vec{r}). \tag{4.2}$$

Момент импульса $\vec{L}$ тела, вращающегося вокруг оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \tag{4.3}$$

где I – момент инерции тела относительно оси.

Момент силы относительно точки отсчета

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{4.4}$$

Момент силы, действующей на тело, относительно оси вращения

$$M = F_{\perp} l, \tag{4.5}$$

где $F_{\perp}$ – проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси вращения; l – плечо силы (кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения).

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси имеет вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \tag{4.6}$$

или

$$\vec{M}\,dt = d\left(I\vec{\omega}\right). \tag{4.7}$$

В случае постоянного момента инерции

$$I\vec{\beta} = \vec{M}, \tag{4.8}$$

где β – угловое ускорение тела.

Моменты инерции

Тело массы m	Положение оси	Момент инерции
Материальная точка на невесомом стержне длиной r	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	mr^2
Однородный прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Однородный прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Однородный сплошной прямой цилиндр или диск радиуса R	Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
Полый тонкостенный прямой цилиндр или обруч радиуса R	Ось симметрии	mR^2
Однородный шар радиуса R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$
Сфера радиуса R	Ось проходит через центр сферы	$\frac{2}{3}mR^2$

Теорема Гюйгенса-Штейнера: момент инерции тела относительно некоторой заданной оси

$$I = I_c + mb^2, \tag{4.9}$$

где I_c – момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно заданной оси, b – расстояние между осями.

Если для рассматриваемой в задаче системы сумма проекций моментов внешних сил на некоторое направление равна нулю, то выполняется закон сохранения момента импульса:

$$\sum_1^N \vec{L}_i = \text{const}. \tag{4.10}$$

Задачи

4.1. Расположенный вертикально однородный тонкий стержень AB массой 0,2 кг и длиной 1 м может свободно вращаться вокруг

горизонтальной оси, проходящей через точку O, лежащую между A и B. В нижнюю точку A на стержне попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси вращения) со скоростью 10 м/с и прилипает к стержню. Масса шарика равна 10 г. Определить угловую скорость стержня и линейную скорость точки B в начальный момент времени. Расстояние между точками A и O равно 0,5 м.

4.2. Расположенный вертикально однородный тонкий стержень AB массой 0,2 кг и длиной 1 м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O, лежащую между A и B. В нижнюю точку A на стержне попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси вращения) со скоростью 10 м/с и прилипает к стержню. Масса шарика равна 10 г. Определить угловую скорость стержня и линейную скорость точки B в начальный момент времени. Расстояние между точками A и O равно 2/3 м.

4.3. Расположенный вертикально однородный стержень длины l может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через верхний его конец. В точку, отстоящую от оси вращения на $2l/3$, ударяется тело массы m, летящее перпендикулярно к стержню и к оси. После удара стержень отклоняется на угол φ, а тело отскакивает назад со скоростью v. Найти начальную скорость тела. Масса стержня M.

4.4. Платформа в виде диска радиусом 1,5 м и массой 180 кг вращается по инерции около вертикальной оси, делая 10 оборотов в минуту. В центре платформы стоит человек массой 60 кг. Какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

4.5. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом $R = 2$ м, стоит человек массой 80 кг. Масса платформы равна 240 кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найти, с какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью 2 м/с относительно платформы.

4.6. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой 60 кг. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя его, вернется в исходную точку на платформе? Масса платформы равна 240 кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

4.7. Платформа в виде диска радиусом 1 м вращается по инерции, совершая 6 оборотов в минуту. На краю платформы стоит человек,

масса которого равна 80 кг. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы равен 120 кг·м^2. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

4.8. В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках стержень длиной 2,4 м и массой 8 кг, расположенный вертикально по оси вращения. Скамья с человеком совершает 60 оборотов в минуту. С какой частотой будет вращаться скамья с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи равен 6 кг·м^2.

4.9. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках стержень, расположенный вертикально вдоль оси вращения. Стержень служит осью вращения колеса, расположенного на верхнем конце стержня. Скамья неподвижна, колесо вращается, делая 600 оборотов в минуту. Радиус R колеса равен 20 см, его масса $m=3$ кг. Определить частоту вращения скамьи, если человек повернет стержень на угол 180°. Суммарный момент инерции человека и скамьи равен 6 кг·м^2. Массу колеса можно считать равномерно распределенной по ободу.

4.10. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой 0,4 кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью 20 м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии 0,8 м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья с человеком, поймавшим мяч, если суммарный момент инерции человека и скамьи равен 6 кг·м^2?

4.11. Деревянный стержень массой $M=6$ кг и длиной 2 м может вращаться в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В нижний конец стержня попадает пуля массой $m=10$ г, летевшая со скоростью $v=10$ м/с перпендикулярно стержню и оси, и застревает в нем. Определить кинетическую энергию системы после удара.

4.12. Деревянный стержень массой $M=6$ кг и длиной 2 м может вращаться в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В нижний конец стержня попадает пуля массой $m=10$ г, летевшая со скоростью $v=10$ м/с перпендикулярно стержню и оси, и застревает в нем. На какой максимальный угол от вертикали отклонится система после удара?

4.13. Горизонтальная платформа в виде сплошного диска массой 200 кг вращается по инерции вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая 10 оборотов в минуту. Человек массой 70 кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой

будет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

4.14. Горизонтальная платформа массой $m=80$ кг и радиусом $R=1$ м вращается, совершая 20 оборотов в минуту. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от 2,94 кг·м^2 до 0,98 кг·м^2. Считать платформу однородным диском.

4.15. Человек массой 60 кг находится на неподвижной платформе массой 100 кг. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом $r=5$ м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы $v=4$ км/ч. Радиус платформы $R=10$ м. Считать платформу однородным диском, а человека – материальной точкой.

4.16. Тонкий однородный стержень длиной $l=1$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. Стержень отклонили от вертикали на угол $\varphi=60°$ и отпустили. Определить для начального момента времени угловое и тангенциальное ускорения нижнего конца стержня.

4.17. Тонкий однородный стержень длиной $l=1$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через него на расстоянии 1/3 м от его верхнего конца. Стержень отклонили от вертикали на угол $\varphi=60°$ и отпустили. Определить для начального момента времени угловое и тангенциальное ускорения нижнего конца стержня.

4.18. На барабан радиусом $R=0{,}4$ м намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 15 кг. Найти момент инерции барабана, если известно, что груз опускается с ускорением 2,8 м/с^2.

4.19. На барабан массой 15 кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 3 кг. Найти ускорение груза. Барабан можно считать однородным цилиндром. Трением пренебречь.

4.20. Маховое колесо, момент инерции которого 245 кг·м^2, вращается, совершая 120 оборотов в минуту. Через 1 мин оно останавливается. Найти момент сил трения. Колесо считать однородным диском.

4.21. Маховое колесо, момент инерции которого 245 кг·м^2, вращается, совершая 120 оборотов в минуту. Через 1 мин оно останавливается. Найти число оборотов, которое сделало колесо за это время. Колесо считать однородным диском.

4.22. Маховик радиусом 0,3 м и массой 15 кг соединен с мотором при помощи приводного ремня. Натяжение ремня, идущего без

скольжения, постоянно и равно 19,8 Н. Какое число оборотов в секунду будет делать маховик через 10 с после начала движения? Маховик считать однородным диском. Трением пренебречь.

4.23. Диск массой 0,5 кг и диаметром 400 мм вращается с угловой скоростью 157 рад/с. При торможении он останавливается в течение 10 с. Найти среднюю величину тормозящего момента.

4.24. Блок, который можно считать однородным диском массой $m = 200$ г, укреплен на горизонтальной оси. Через него перекинута нить с укрепленными на ее концах грузами 325 г и 225 г. Нить не скользит по блоку. С каким ускорением будут двигаться грузы?

4.25. Через блок массой $m = 0{,}2$ кг перекинут шнур, к концам которого подвесили грузы массами 0,3 кг и 0,5 кг. Определить силы натяжения шнура по обе стороны блока во время движения грузов, если масса блока равномерно распределена по ободу.

4.26. Шарик массы m бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v. Найти модуль момента импульса шарика относительно точки бросания в зависимости от времени. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4.27. Шарик массы m падает без начальной скорости с высоты h над поверхностью Земли. Найти модуль приращения момента импульса шарика за время падения относительно точки O системы отсчета, движущейся поступательно со скоростью v в горизонтальном направлении. В момент начала падения точка O совпадала с шариком. Сопротивление воздуха не учитывать.

4.28. Человек массы m стоит на краю горизонтального однородного диска массы M и радиуса R, который может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент человек начал двигаться по краю диска, совершил перемещение на угол φ относительно диска и остановился. Пренебрегая размерами человека, найти угол, на который повернулся диск к моменту остановки человека.

4.29. Однородный шар массы $m = 5{,}0$ кг скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонтом. Найти кинетическую энергию шара через $t = 1{,}6$ с после начала движения.

4.30. Однородный сплошной цилиндр радиуса R и массы M может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. На цилиндр в один ряд намотан тонкий шнур длины l и массы m. Найти угловое ускорение цилиндра в зависимости от длины x свешивающейся части шнура. Считать, что центр масс намотанной части шнура находится на оси цилиндра.

5. Кинематика специальной теории относительности. Релятивистская механика

Теоретические сведения

Исходными положениями специальной теории относительности (СТО) являются постулаты А. Эйнштейна. Их математическое выражение – преобразования Лоренца, связывающие координаты и время в разных инерциальных системах отсчета (ИСО).

Преобразования Лоренца при переходе от K к K'-системе, если одна система движется относительно другой вдоль оси x (рис. 5.1) имеют вид:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad (5.1)$$

а при обратном переходе от K' к K-системе:

$$x = \frac{x' + Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + xV/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad (5.2)$$

где $\beta = \frac{V}{c}$, V – скорость K'-системы относительно K-системы. В задачах K-систему часто называют лабораторной системой.

Следствием преобразований Лоренца являются следующие эффекты: сокращение продольных размеров движущихся тел, замедление хода движущихся часов, инвариантность интервала, релятивистский закон сложения скоростей.

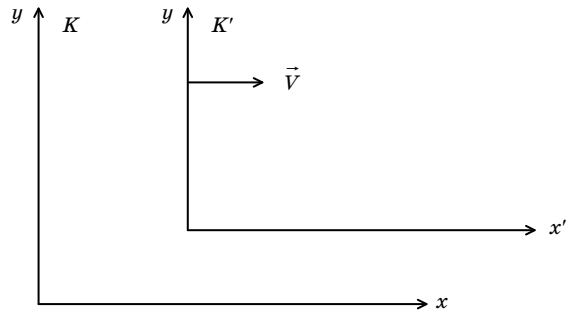

Рис. 5.1

Продольный размер тела l – его длина в направлении движения – величина относительная

$$l = l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}, \qquad (5.3)$$

где l_0– собственная длина тела (длина в ИСО, где тело неподвижно), l – длина тела в ИСО, относительно которой тело движется со скоростью v. Поперечные размеры тела одинаковы во всех ИСО.

Длительность процесса в ИСО, относительно которой процесс неподвижен, называется собственным временем T_0 процесса. Длительность T процесса в ИСО, относительно которой процесс движется со скоростью v, определяется формулой

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \qquad (5.4)$$

Этот эффект называется замедлением хода движущихся часов.

Релятивистский закон сложения скоростей выражается формулами

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1-\frac{v_x V}{c^2}}, \quad v_x = \frac{v'_x + V}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}, \qquad (5.5)$$

где v_x, v'_x – проекции скорости движущегося объекта на ось в K и K'-системах; V – скорость K'-системы относительно K-системы (рис. 5.1).

Релятивистская механика используется для описания движения быстрых частиц, то есть таких, для которых скорость сравнима со скоростью света $(v \sim c)$, а кинетическая энергия сравнима с энергией покоя частицы $(E_к \sim E_0)$.

Для таких частиц иначе, чем в классической механике, определяются привычные понятия.

Релятивистская масса частицы

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (5.6)$$

является величиной относительной, в отличие от массы покоя m_0, которая есть инвариант.

Релятивистский импульс частицы

$$\vec{p} = m(v)\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \qquad (5.7)$$

Полная энергия частицы как функция скорости

$$E = m(v)c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad (5.8)$$

или как функция импульса частицы

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}. \qquad (5.9)$$

Кинетическая энергия частицы

$$E_к = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2, \qquad (5.10)$$

где $E_0 = m_0c^2$ – энергия покоя частицы.

Формула (6.10) с учетом (6.8) может быть представлена в виде

$$E_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} - 1\right). \qquad (5.11)$$

Для решения задач может быть полезна формула, выражающая импульс частицы через кинетическую энергию:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к(E_к + 2E_0)}. \qquad (5.12)$$

Задачи

5.1. Стержень направлен в собственной системе отсчета под углом 45° к оси x'. Под каким углом к оси x будет направлен этот стержень в лабораторной системе отсчета, в которой он движется вдоль этой оси со скоростью $v = \sqrt{2/3}\,c$?

5.2. Стержень, имеющий собственную длину 1 м, направлен в собственной системе отсчета под углом 45° к оси x'. Найти длину этого стержня в лабораторной системе отсчета, в которой он движется вдоль оси x со скоростью $v = \sqrt{2/3}\,c$.

5.3. Прямоугольник, стороны которого относятся, как $\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$, движется вдоль оси x. При какой скорости этот прямоугольник для неподвижного наблюдателя станет квадратом? Ответ привести в долях скорости света.

5.4. Прямоугольник со сторонами $x_0=2$ м, $y_0=1$ м движется вдоль оси x со скоростью $\upsilon=0{,}6c$. Найти отношение длин сторон x/y этого прямоугольника в лабораторной системе отсчета.

5.5. Ромб с углом 60° движется вдоль своей длинной диагонали. При какой скорости ромба наблюдатель из лабораторной системы отсчета увидит квадрат? Ответ привести в долях скорости света.

5.6. Квадрат со стороной 1 м движется со скоростью $\upsilon=0{,}2\,c$ вдоль одной из своих сторон. Найти длину диагонали квадрата для наблюдателя из лабораторной системы отсчета.

5.7. Движущийся вдоль своей оси с некоторой скоростью стержень имеет для наблюдателя из лабораторной системы отсчета длину $l_1=1$ м. При увеличении скорости тела в 4/3 раза длина стержня стала $l_2=0{,}75$ м. Найти собственную длину стержня.

5.8. Стержень с собственной длиной $l_0=1{,}25$ м движется вдоль своей оси и имеет в лабораторной системе отсчета длину $l_1=1$ м. Во сколько раз нужно увеличить скорость стержня, чтобы его длина сократилась до $l_2=0{,}75$ м?

5.9. С какой скоростью и в каком направлении должен двигаться эллипс, одна из главных осей которого на 20% короче другой, чтобы для наблюдателя из лабораторной системы отсчета он превратился в круг?

5.10. С какой скоростью в долях скорости света должно двигаться тело, чтобы его объем уменьшился на 1/13 часть его собственного значения?

5.11. Сколько лет по собственным часам двигался с постоянной скоростью космический корабль, если для наблюдателя в лабораторной системе отсчета время движения составило $t=1$ год, а пути, пройденные в лабораторной и в собственной системах отсчета, отличаются в 1,25 раза?

5.12. С какой скоростью должен двигаться мюон, чтобы за собственное время жизни $\tau_0=2\cdot10^{-6}\,c$ пролететь в лабораторной системе отсчета расстояние $l=30$ км?

5.13. Чему равно время жизни мюона в лабораторной системе отсчета, если его собственное время жизни равно $\tau_0=2\cdot10^{-6}$ с, а пути, пройденные в лабораторной и в собственной системах отсчета, отличаются в 50 раз?

5.14. Космический корабль движется вокруг Земли со скоростью $\upsilon=7{,}863$ км/с. За сколько лет часы на корабле и на Земле разойдутся на 1 секунду? Скорость света считать равной $c=2{,}998\cdot10^8$ м/с?

5.15. На сколько лет разошлись «показания часов» в системах отсчета, связанных с Солнцем и с Землей, за 5 млрд. лет, если считать, что все это время Земля двигалась вокруг Солнца с постоянной скоростью $\upsilon=10^{-4}\,c$?

5.16. Скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца $\upsilon=10^{-4}c$. Считая, что эта скорость остается постоянной, найти, за сколько лет часы в системах отсчета, связанных с Солнцем и с Землей разойдутся на $\Delta t=1$ год.

5.17. Считая скорость движения точек на экваторе, связанную с суточным вращением Земли, равной $\upsilon=463$ м/с, найти, за сколько лет часы на полюсе и на экваторе разойдутся на 1 секунду. Скорость света считать равной $c=2{,}998\cdot10^8$ м/с.

5.18. Ледяной метеорит движется со скоростью $\upsilon=0{,}25\cdot c$. Найти плотность льда в лабораторной системе отсчета, если в собственной системе отсчета она равна $\rho_0=900$ кг/м^3.

5.19. С какой скоростью в долях скорости света должен двигаться объект, чтобы его плотность увеличилась на 12,5%?

5.20. С какой скоростью в долях скорости света должен двигаться объект, чтобы его кинетическая энергия в $n=8/3$ раза превысила значение, рассчитанное по классической формуле?

5.21. С какой скоростью в долях скорости света движется объект, если его кинетическая энергия, вычисленная по классической формуле, составляет 72% от значения, вычисленного по точной формуле?

5.22. Объект движется со скоростью $\upsilon=0{,}8\cdot c$. Какую долю от точного значения составляет кинетическая энергия, вычисленная по классической формуле?

5.23. С какой скоростью в долях скорости света движется объект, если его кинетическая энергия составляет 1/12 от энергии покоя?

5.24. Частица имеет импульс, равный $p=0{,}75m_0\,c$. Найти скорость этой частицы в долях скорости света.

5.25. Кинетическая энергия частицы составляет $E_K=0{,}25m_0\,c^2$. Найти скорость этой частицы в долях скорости света.

5.26. Полная энергия частицы в $n=5$ раз больше кинетической. Найти скорость этой частицы в долях скорости света.

5.27. Два объекта движутся в одном направлении со скоростями $\upsilon=0{,}4\cdot c$ и $\upsilon=0{,}5\cdot c$. Найти их относительную скорость в долях скорости света.

5.28. Два объекта движутся в противоположных направлениях со скоростями $\upsilon = 0{,}4 \cdot c$ и $\upsilon = 0{,}5 \cdot c$. Найти их относительную скорость в долях скорости света.

5.29. Два космических объекта двигаются в одном направлении с относительной скоростью $\upsilon = 0{,}5 \cdot c$. Найти в лабораторной системе отсчета скорость одного из них, если скорость второго $\upsilon_2 = 0{,}8 \cdot c$. Ответ дать в долях скорости света. Рассмотреть случай $\upsilon_1 < \upsilon_2$.

5.30. Два космических объекта двигаются в одном направлении с относительной скоростью $\upsilon = 0{,}5 \cdot c$. Найти в лабораторной системе отсчета скорость одного из них, если скорость второго $\upsilon_2 = 0{,}8 \cdot c$. Ответ дать в долях скорости света. Рассмотреть случай $\upsilon_1 > \upsilon_2$.

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

6. Кинематика и динамика гармонических колебаний

Теоретические сведения

Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{6.1}$$

где x – смещение точки из положения равновесия; t – время, A – амплитуда, ω – циклическая частота и φ – начальная фаза колебаний.

При этом

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi / T \text{ (рад/с)}, \tag{6.2}$$

где ν – частота (Гц) и T – период колебаний.

Скорость точки, совершающей гармонические колебания,

$$\upsilon = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi). \tag{6.3}$$

Ускорение точки, совершающей гармонические колебания

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi). \tag{6.4}$$

Если складываются два колебания с одинаковыми частотами, происходящие вдоль одного направления, то амплитуда A результирующего колебания определятся по формуле

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\ , \tag{6.5}$$

где A_1 и A_2 – амплитуды складываемых колебаний , φ_1 и φ_2 – их начальные фазы.

Начальная фаза результирующего колебания определяется из выражения

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}. \tag{6.6}$$

Если точка участвует в двух колебаниях одной частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях, то уравнение траектории точки имеет вид:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{6.7}$$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$m\ddot{x} = -kx \tag{6.8}$$

или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{6.9}$$

где m – масса точки, k –коэффициент упругости.

Полная энергия точки, совершающей гармонические колебания

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2. \tag{6.10}$$

Период колебаний тела, подвешенного на пружине

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{6.11}$$

Формула справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука. Масса пружины мала по сравнению с массой тела.

Период малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{6.12}$$

где l – длина маятника, g – ускорение свободного падения.

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}, \tag{6.13}$$

где I – момент инерции тела, относительно оси колебаний; b – расстояние от точки подвеса тела до его центра масс; $L = I/(mb)$ – приведенная длина физического маятника.

Период крутильных колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}, \tag{6.14}$$

где I – момент инерции тела относительно оси, совпадающей с упругой нитью; C –жесткость упругой нити, равная отношению упругого момента, возникающего при закручивании нити, к углу, на который нить закручивается.

Задачи

6.1. Колебания материальной точки массой 0,1 г происходят по закону $x = 0{,}05\cos(20t)$ м. Определить максимальные значения возвращающей силы и кинетической энергии.

6.2. Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, равна 30 мкДж. Максимальная сила, действующая на тело, равна 1,5 мН. Написать уравнение движения этого тела, если период колебаний равен 2 с, а начальная фаза $\varphi = \pi/6$.

6.3. Материальная точка массой 0,01 кг совершает колебания по закону $x = 0{,}2\cos(2\pi t/3)$ м. Найти возвращающую силу через 1 с после начала движения и полную энергию материальной точки.

6.4. Колебания материальной точки происходят согласно уравнению $x = 0{,}08\cos(\pi t/6)$ м. Когда возвращающая сила равна 5 мН, потенциальная энергия точки равна 100 мкДж. Найти соответствующий момент времени и фазу колебаний.

6.5. Точка совершает гармонические колебания по закону синуса. Период колебаний 2 с, амплитуда 0,5 м, начальная фаза равна нулю. Найти скорость точки в момент времени, когда смещение точки от положения равновесия равно 0,25 м.

6.6. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону синуса с частотой $\nu = 500$ Гц и амплитудой $A = 0{,}02$ см. Определить средние значения скорости $\langle v \rangle$ и ускорения $\langle a \rangle$ точки на пути от ее крайнего положения до положения равновесия, а также найти максимальные значения этих величин.

6.7. Наибольшее смещение и наибольшая скорость точки, совершающей гармонические колебания, равны соответственно 5 см и 12 см/с. Каково наибольшее ускорение? Каковы скорость и ускорение точки в тот момент, когда смещение точки от положения равновесия равно 3 см?

6.8. К пружине подвешена чашка весов с гирями. При этом период вертикальных колебаний равен 0,5 с. После того как на чашку весов положили еще добавочные гири, период вертикальных колебаний стал равен 0,6 с. На сколько удлинилась пружина от прибавления этого добавочного груза?

6.9. Математический маятник длиной 1 м установлен в лифте. Лифт поднимается с ускорением, равным 2,5 м/с^2. Определить период колебаний маятника.

6.10. Определить период малых колебаний шарика, подвешенного на нити длиной 0,2 м, если он находится в жидкости, плотность

которой в 3 раза меньше плотности шарика. Сопротивление жидкости пренебрежимо мало.

6.11. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки равно 10 см, наибольшая скорость равна 20 см/с. Найти угловую частоту колебаний и максимальное ускорение точки.

6.12. Максимальная скорость точки, совершающей гармонические колебания, равна 10 см/с, максимальное ускорение равно 100 см/с^2. Найти угловую частоту колебаний, их период и амплитуду.

6.13. Точка совершает колебания по закону $x = A\sin(\omega t)$. В некоторый момент времени смещение точки оказалось равным 5 см. Когда фаза колебаний увеличилась вдвое, смещение стало равным 8 см. Найти амплитуду колебаний.

6.14.Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебательных движений с одинаковым периодом 8 с и одинаковой амплитудой 0,02 м. Разность фаз между этими колебаниями равна $\pi/4$. Начальная фаза одного из этих колебаний равна нулю.

6.15. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами 10 см и 6 см складываются в одно колебание с амплитудой 14 см. Найти разность фаз складываемых колебаний.

6.16. Шар, радиус которого равен 5 см, подвешен на нити длиной 0,1 м. Определить относительную погрешность, которую допускают, если, вычисляя период колебаний маятника, принимают его за математический маятник длиной 0,15 м.

6.17. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, возникающего при сложении двух колебаний с одинаковыми направлениями и периодами: $x_1 = 0{,}01\sin(\pi t)$м и $x_2 = 0{,}01\sin(\pi t + \pi/2)$м. Найти уравнение результирующего колебания.

6.18. На концах тонкого стержня длиной 0,3 м укреплены одинаковые грузики по одному на каждом конце. Стержень с грузиками колеблется около горизонтальной оси, проходящей через точку, удаленную на 0,1 м от одного из концов стержня. Определить приведенную длину и период колебаний такого физического маятника. Массой стержня пренебречь.

6.19. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами, равными 1,5 с, и амплитудами, равными 2 см. Начальные фазы колебаний $\pi/2$ и $\pi/3$. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Найти его уравнение.

6.20. На стержне длиной 0,3 м укреплены два одинаковых грузика: один – в середине стержня, другой – на одном из его концов. Стержень с грузиками колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определить приведенную длину и период колебаний такой системы. Массой стержня пренебречь.

6.21. Тонкий обруч, повешенный на гвоздь, вбитый горизонтально в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус обруча равен 0,3 м. Вычислить период колебаний обруча.

6.22. Складываются два взаимно перпендикулярных колебания $x = 2\sin(\omega t)$ см и $y = \cos(\omega t + \pi/3)$ см. Найти уравнение траектории.

6.23. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = 2\sin(\omega t)$ см и $y = 2\cos(\omega t)$ см. Найти траекторию движения точки.

6.24. Однородный диск радиусом 0,3 м колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Каков период его колебаний?

6.25. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = \sin(\omega t)$ см и $y = 2\sin(\omega t + \pi/2)$ см. Найти траекторию движения точки.

6.26. Через какое время от начала движения точка, совершающая колебательное движение по уравнению $x = 7\sin(0{,}5\pi t)$ см, проходит путь от положения равновесия до максимального смещения?

6.27. Определить максимальные значения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой 3 см и угловой частотой $\pi/2$ рад/с$^{-1}$.

6.28. Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить вместо медного шарика алюминиевый такого же радиуса?

6.29. Диск радиусом 24 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса перпендикулярно плоскости диска. Определить приведенную длину и период колебаний такого маятника.

6.30. Математический маятник длиной 0,4 м и физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной 0,6 м синхронно колеблются около одной и той же горизонтальной оси. Определить расстояние центра масс стержня от оси колебаний.

7. Затухающие колебания

Теоретические сведения

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \tag{7.1}$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{7.2}$$

где k –коэффициент упругости, r – коэффициент сопротивления среды, β – коэффициент затухания

$$\beta = \frac{r}{2m}. \tag{7.3}$$

Круговая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{7.4}$$

Уравнение затухающих колебаний

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi), \tag{7.5}$$

где A_0 – амплитуда в момент времени $t = 0$.

Логарифмический декремент колебаний

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T, \tag{7.6}$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, отстоящих друг от друга на период.

Время релаксации τ – это время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в е раз,

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \tag{7.7}$$

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\theta}. \tag{7,8}$$

Задачи

7.1. Уравнение затухающих колебаний $x = 2\exp(-\beta t)\sin(\omega t)$ см. Логарифмический декремент затухания $\theta = 1{,}6$. Найти смещение x точки из положения равновесия в момент времени $t = T/4$.

7.2. Уравнение затухающих колебаний дано в виде $x = 5e^{-0{,}25t}\sin(\pi/2\, t)$ см. Найти скорость колеблющейся точки в моменты времени: 0, T, $2T$, $3T$.

7.3. Логарифмический декремент затухания математического маятника $\theta = 0{,}2$. Во сколько раз изменится амплитуда колебаний за время Δt, равное периоду T?

7.4. Математический маятник длиной $l = 1$ м совершает затухающие гармонические колебания. За время $t = 1$ мин амплитуда колебаний $A(t)$ уменьшилась в два раза. Определить логарифмический декремент затухания θ.

7.5. Логарифмический декремент затухания математического маятника $\theta = 0{,}5$, длина нити $l = 1$ м. Определить коэффициент затухания β и частоту затухающих колебаний ω.

7.6. Определить логарифмический декремент затухания математического маятника θ, если за время $\Delta t = 2T$ амплитуда колебаний уменьшилась в два раза.

7.7. Математический маятник совершает затухающие гармонические колебания с логарифмическим декрементом затухания $\theta = 0{,}2$. Во сколько раз уменьшится полное ускорение маятника в его крайнем положении за время Δt, равное периоду T?

7.8. Математический маятник совершает затухающие гармонические колебания с логарифмическим декрементом затухания $\theta = 0{,}2$. Во сколько раз уменьшится скорость маятника при прохождении положения равновесия за время $\Delta t = 2T$?

7.9. Математический маятник длиной $l = 0{,}5$ м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на 5 см из положения устойчивого равновесия, а через время $\Delta t = T$ – на 4 см. Определить время релаксации τ.

7.10. Амплитуда A затухающих гармонических колебаний математического маятника за 1 мин уменьшилась вдвое. Во сколько раз амплитуда уменьшится за 3 мин?

7.11. Материальная точка совершает затухающие гармонические колебания. Коэффициент затухания $\beta = 0{,}5$ с$^{-1}$. Определить период T и логарифмический декремент затухания θ, если известно, что за время $\Delta t = T$, амплитуда колебаний A уменьшилась в два раза.

7.12. Математический маятник совершает колебания по закону синуса в вязкой среде. Длина нити маятника $l = 9{,}81$ м, коэффициент затухания $\beta = 0{,}6$ с$^{-1}$, начальное значение амплитуды $A_0 = 0{,}05$ м. Определить скорость материальной точки v в момент времени $t = 0{,}25T$, если начальная фаза колебаний равна 0.

7.13. Период затухающих колебаний $T=4$ с, начальная амплитуда $A_0=2$ см, начальная фаза $\varphi=\pi/2$, логарифмический декремент затухания $\theta=1{,}6$. Найти смещение x точки из положения равновесия в момент времени $t=T/4$.

7.14. Материальная точка совершает гармонические колебания с коэффициентом затухания $\beta=0{,}5$ с$^{-1}$. Начальная амплитуда равна $A_0=0{,}2$ м, начальное отклонение $x_0=0$. Определить скорость материальной точки в момент времени $t=2T$, если период затухающих колебаний $T=1$ с.

7.15. Масса m металлического шарика, закрепленного на конце горизонтально расположенной пружины, равна 0,1 кг. Коэффициент жесткости пружины равен $k=0{,}2$ Н/м, логарифмический декремент затухания $\theta=0{,}395$. Определить коэффициент затухания β и период T затухающих колебаний. Трением и массой пружины пренебречь.

7.16. За время t, равное одному периоду, амплитуда A затухающих колебаний, совершаемых материальной точкой, уменьшилось в e раз. Определить скорость материальной точки в момент времени $t=T/2$, если коэффициент затухания $\beta=0{,}5$ с$^{-1}$, начальное значение амплитуды $A_0=0{,}2$ м, начальное отклонение $x_0=0$.

7.17. Определить скорость v материальной точки, совершающей затухающие гармонические колебания, в момент времени $t=0{,}5$ с, если известно, что период затухающих колебаний $T=2$ с, логарифмический декремент затухания $\theta=2$, максимальное значение амплитуды $A_0=0{,}3$ м, начальное отклонение $x_0=0$.

7.18. Тело массой $m=0{,}1$ кг совершает затухающие гармонические колебания с частотой $\omega=0{,}25\pi$ с$^{-1}$, начальное отклонение $x_0=0$. Максимальное значение амплитуды $A_0=0{,}04$ м. Определить кинетическую энергию $E_к$ затухающих колебаний в момент времени $t=0{,}5T$, если коэффициент затухания $\beta=0{,}05$ с$^{-1}$.

7.19. Определить потенциальную энергию материальной точки массой $m=0{,}1$ г, совершающей затухающие гармонические колебания, в момент времени $t=T/6$. Частота затухающих колебаний $\omega=4$ с$^{-1}$, коэффициент затухания $\beta=3$ с$^{-1}$, максимальное значение амплитуды колебаний $A_0=0{,}02$ м. Начальное отклонение $x_0=0$.

7.20. Определить скорость материальной точки, совершающей затухающие колебания с коэффициентом затухания $\beta=0{,}4$ с$^{-1}$ и периодом $T=2$ с в момент времени $t=0{,}125T$, если максимальное значение амплитуды $A_0=4{,}4$ см. Начальное отклонение $x_0=0$.

7.21. Математический маятник совершает затухающие колебания с коэффициентом затухания $\beta=0{,}16$ с$^{-1}$. Длина нити маятника $l=2{,}45$ м. Определить тангенциальное ускорение a_τ маятника в момент времени $t=0{,}125T$, если максимальное значение амплитуды равно $A_0=0{,}15$ м и начальное отклонение $x_0=0$.

7.22. Математический маятник совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания $\theta=0{,}8$. Длина нити маятника $l=2{,}45$ м. Определить нормальное ускорение маятника a_n в момент времени $t=0{,}25\ T$, если начальное отклонение $x_0=0$, а максимальное значение амплитуды $A_0=0{,}1$ м.

7.23. Материальная точка совершает затухающие гармонические колебания с максимальным значением амплитуды $A_0=10$ см и логарифмическим декрементом затухания $\theta=1{,}2$. Определить смещение x материальной точки из положения устойчивого равновесия за время $t=T/6$, если начальное отклонение $x_0=0$.

7.24. Определить координату x материальной точки относительно положения равновесия в момент времени $t=1{,}3$ с, если известно, что амплитуда затухающих колебаний $A_0=20$ см, логарифмический декремент затухания равен $\theta=7{,}564$, начальное отклонение $x_0=0$, циклическая частота собственных колебаний $\omega_0=1{,}26$ с$^{-1}$.

7.25. Период затухающих колебаний $T=4$ с, логарифмический декремент затухания $\theta=1{,}6$, начальное отклонение $x_0=0$. Смещение точки при $t=0{,}25T$, равно 4,5 см. Написать уравнение движения этого колебания.

7.26. Осциллятор со временем релаксации $\tau=20$ с в начальный момент времени имеет смещение $x_0=10$ см. При каком значении начальной скорости это смещение окажется равным своей амплитуде?

7.27. Математический маятник совершает колебания в среде, для которой логарифмический декремент затухания $\theta=1{,}50$. Каким будет значение θ, если сопротивление среды увеличить в 2 раза?

7.28. К невесомой пружине подвесили грузик, и она растянулась на 9,8 см. С каким периодом будет колебаться грузик, если ему дать небольшой толчок в вертикальном направлении? Логарифмический декремент затухания $\theta=3{,}1$.

7.29. Найти добротность математического маятника длины 50 см, если за промежуток времени $t=5{,}2$ мин его полная механическая энергия уменьшилась в $\eta=4{,}0\cdot10^4$ раз.

7.30. Однородный диск радиуса 3 см может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через край диска. Найти период малых колебаний этого диска, если логарифмический декремент затухания $\theta=1{,}00$.

8. Вынужденные колебания

Теоретические сведения

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos\Omega t \qquad (8.1)$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t \qquad (8.2)$$

где $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$; $F_0 \cos\Omega t$ – внешняя периодическая сила, действующая на колеблющуюся материальную точку с циклической частотой Ω. Установившиеся вынужденные колебания являются незатухающими и совершаются с циклической частотой Ω.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \qquad (8.3)$$

Резонансная частота и амплитуда колебаний в резонансе

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}; \qquad A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (8.4)$$

Сдвиг фазы θ между вынуждающей силой и смещением:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \qquad (8.5)$$

Задачи

8.1. Твердое тело совершает затухающие колебания с частотой $\omega = 1$ рад/с. В некоторый момент времени на тело подействовала вынуждающая сила на частоте резонанса. Определить резонансную частоту вынужденных колебаний, если коэффициент затухания $\beta = 0{,}6$ рад/с.

8.2. Определить коэффициент затухания колебаний математического маятника длиной 1 м, если резонансная частота вынужденных колебаний равна $\Omega_{\text{рез}} = 2{,}41$ рад/с.

8.3. Определить начальную фазу вынужденных колебаний математического маятника длиной 4,9 м, если частота вынуждающей силы равна $\Omega = 0{,}8$ рад/с, а коэффициент затухания $\beta = 0{,}6$ рад/с.

8.4. Центр инерции твердого тела массой $m = 0{,}1$ кг расположен на расстоянии $a = 0{,}4$ м от горизонтальной оси вращения. Момент инерции тела относительно оси вращения равен 0,08 кг·м^2. Определить резонансную частоту вынужденных колебаний твердого тела, если коэффициент затухания $\beta = 1{,}2$ рад/с. Ускорение свободного падения g принять равным 10 м/с^2.

8.5. Под действием внешней вынуждающей силы твердое тело, закрепленное на оси вращения, совершает вынужденные колебания. Масса тела равна $m = 0{,}1$ кг, максимальное значение вынуждающей силы $F_0 = 0{,}06$ Н. Определить амплитуду вынужденных колебаний на частоте резонанса, если известно, что при отсутствии вынуждающей силы частота затухающих колебаний $\omega = 12$ рад/с, а коэффициент затухания $\beta = 0{,}4$ рад/с.

8.6. Ось вращения металлического стержня, расположенного горизонтально, проходит через один из его концов. Длина стержня 0,5 м. Стержень совершает вынужденные колебания на частоте $\Omega = 5$ рад/с. Определить начальную фазу вынужденных колебаний стержня, если коэффициент затухания $\beta = 0{,}5$ рад/с. Ускорение свободного падения g принять равным 10 м/с^2.

8.7. Математический маятник длиной 0,5 м совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания $\theta = 0{,}3$. Под действием периодической вынуждающей силы на частоте резонанса амплитуда установившихся вынужденных колебаний стала равной $A_{\text{рез}} = 0{,}0318$ м. Определить максимальное значение вынуждающей силы, рассчитанной на единицу массы маятника.

8.8. Твердое тело массой $m = 0{,}01$ кг совершает вынужденные колебания с амплитудой 0,1 м и частотой $\Omega = 0{,}78$ рад/с. Максимальное значение вынуждающей силы равно $F_0 = 0{,}005$ Н. Определить коэффициент затухания, если известно, что собственная частота колебаний $\omega_0 = 1{,}9$ рад/с.

8.9. Металлический шарик, подвешенный на нерастяжимой нити длиной 2 м, совершает вынужденные колебания. Определить резонансную частоту колебаний, если известно, что логарифмический декремент затухания равен $\theta = 3{,}07$. Ускорение свободного падения g принять равным 10 м/с^2.

8.10. Масса металлического шарика, закрепленного на конце горизонтально расположенной пружины, равна $m = 0{,}03$ кг. Коэффициент жесткости пружины равен $k = 0{,}27$ Н/м, логарифмический

декремент затухания $\theta = 4{,}308$. Определить резонансную частоту вынужденных гармонических колебаний.

8.11. Уравнение колебаний материальной точки массой $1{,}6 \cdot 10^{-2}$ кг имеет вид $x = 0{,}1\sin(\Omega t / 8 - \pi / 4)$ м. Определить максимальное значение вынуждающей силы, действующей на точку. Коэффициент затухания равен $\beta = 1 / (2\pi)$ рад/с.

8.12. На резонансной частоте амплитуда вынужденных колебаний тела равна 0,04 м. Масса тела $m = 0{,}1$ кг. Определить максимальное значение вынуждающей силы, если известно, что коэффициент затухания $\beta = 0{,}5$ рад/с, и частота затухающих колебаний $\omega = 25$ рад/с.

8.13. Определить резонансную частоту вынужденных колебаний математического маятника длиной 1 м, совершающего затухающие колебания с частотой $\omega = 3$ рад/с. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

8.14. Тело массой $m = 0{,}01$ г, подвешенное на пружине жесткостью $k = 0{,}16$ Н/м, совершает вынужденные колебания. Частота вынуждающей силы $\Omega = 3$ рад/с, а ее максимальное значение равно $F_0 = 0{,}02$ Н. Определить амплитуду вынужденных колебаний A, если известно, что коэффициент затухания $\beta = 0{,}5$ рад/с.

8.15. Металлический шарик массой $m = 0{,}2$ кг подвешен на вертикально расположенной пружине. При этом длина пружины увеличилась на величину $\Delta l = 0{,}2$ м. Под действием гармонической вынуждающей силы с амплитудой $F_0 = 0{,}2$ Н шарик начинает совершать вынужденные колебания. Пренебрегая массой пружины, определить циклическую частоту вынуждающей силы Ω, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна, а также значение этой амплитуды, если известно, что коэффициент затухания $\beta = 1$ рад/с.

8.16. Амплитуды вынужденных колебаний при частотах $\Omega_1 = 400$ рад/с и $\Omega_2 = 600$ рад/с равны между собой. Найти частоту, при которой амплитуда смещения максимальна, если известно, что максимальное значение вынуждающей силы F_0 остается постоянным.

8.17. Металлический шарик массой $m = 0{,}01$ кг, подвешенный на практически невесомой и нерастяжимой нити длиной $l = 0{,}5$ м, совершает вынужденные колебания на резонансной частоте. Максимальное значение вынуждающей силы $F_0 = 0{,}016$ Н. Определить начальную фазу и максимальную амплитуду вынужденных колебаний, если коэффициент затухания равен $\beta = 2$ рад/с.

8.18. Тело массой 0,05 кг, подвешенное на невесомой пружине с коэффициентом жесткости $k = 20$ Н/м, совершает вынужденные

колебания с частотой $\Omega = 25$ рад/с. При этом смещение центра инерции тела отстает по фазе от вынуждающей силы на $0{,}75\pi$. Определить коэффициент затухания β.

8.19. Тело массой 0,02 кг совершает затухающие колебания с циклической частотой $\omega = 4{,}5$ рад/с и коэффициентом затухания $\beta = 1{,}5$ рад/с. В некоторый момент времени на тело стала действовать гармоническая вынуждающая сила, амплитуда которой $F_0 = 0{,}02$ Н, а циклическая частота – $\Omega = 3{,}47$ рад/с. Найти среднюю мощность вынуждающей силы за период колебаний.

8.20. Твердое тело, момент инерции которого относительно оси вращения 0,02 кг·м^2, совершает вынужденные колебания, задаваемые уравнением $x = 1{,}5\cos(3t / 2 - \pi / 3)$ см. Масса тела $m = 0{,}2$ кг, расстояние от центра инерции до оси вращения $a = 10$ см. Определить коэффициент затухания β и максимальное значение вынуждающей силы.

8.21. Металлический стержень длиной $l = 0{,}2$ м закреплен на горизонтально расположенной оси, проходящей через один из его концов. Масса стержня 0,4 кг. Стержень совершает вынужденные колебания с циклической частотой $\Omega = 6$ рад/с под действием гармонической силы, максимальное значение которой $F_0 = 0{,}32$ Н. Определить амплитуду колебаний стержня, если коэффициент затухания $\beta = 1{,}6$ рад/с.

8.22. Шар радиуса $R = 0{,}154$ м закреплен на горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса. Коэффициент затухания равен $\beta = 2{,}48$ рад/с. Найти резонансную частоту $\Omega_{рез}$ и начальную фазу φ_0 вынужденных колебаний.

8.23. Ось вращения стержня длиной $l = 0{,}4$ м проходит на расстоянии $0{,}25l$ от его центра инерции. Масса стержня $m = 0{,}1$ кг, коэффициент затухания $\beta = 2{,}48$ рад/с. Найти амплитуду вынужденных колебаний на резонансной частоте, если максимальное значение вынуждающей силы $F_0 = 0{,}14$ Н.

8.24. Металлический шар массой $m = 1{,}3$ кг и радиусом $R = 0{,}05$ м совершает вынужденные колебания с частотой 10,2 рад/с. Ось вращения шара совпадает с касательной к его поверхности. Максимальная амплитуда вынужденных колебаний $A = 0{,}4$ см. Определить максимальное значение вынуждающей силы, если коэффициент затухания $\beta = 2{,}23$ рад/с.

8.25. Металлический шарик массой $m = 0{,}02$ кг, закрепленный на конце вертикально расположенной пружины, совершает вынужденные колебания на частоте резонанса. Определить резонансную частоту $\Omega_{рез}$ колебаний и коэффициент затухания β, если коэффи-

циент жесткости пружины $k=0{,}54$ Н/м и начальная фаза $\varphi_0=\varphi/4$. Массой пружины и трением пренебречь.

8.26. Математический маятник длиной $l=0{,}25$ м совершает вынужденные колебания на резонансной частоте. Определить резонансную частоту колебаний $\Omega_{рез}$ и добротность Q данной колебательной системы. Коэффициент затухания принять равным $\beta=0{,}1$ рад/с.

8.27. На пружине жесткостью $k=2{,}4$ Н/м подвешен груз массой $m=0{,}05$ кг. Груз совершает вынужденные колебания на резонансной частоте $\Omega_{рез}=4$ рад/с. Определить амплитуду вынужденных колебаний и коэффициент затухания, если известно, что максимальное значение вынуждающей силы равно $F_0=0{,}03$ Н.

8.28. Математический маятник длиной $l=22$ см совершает вынужденные колебания на частоте резонанса. Коэффициент затухания равен $\beta=2$ рад/с. Определить резонансную частоту вынужденных колебаний $\Omega_{рез}$. Во сколько раз изменится амплитуда этих колебаний, если частоту вынуждающей силы уменьшить в 2 раза?

8.29. На резонансной частоте амплитуда вынужденных колебаний тела равна 0,04 м. Масса тела $m=0{,}1$ кг. Определить максимальное значение вынуждающей силы, если известно, что коэффициент затухания $\beta=0{,}5$ рад/с и частота затухающих колебаний $\omega=25$ рад/с.

8.30. Определить резонансную частоту вынужденных колебаний математического маятника длиной $l=1$ м, совершающего затухающие колебания с частотой $\omega=3$ рад/с. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

9. Основные характеристики волн

Теоретические сведения

Основными характеристиками волн являются:

а) фазовая скорость волны

$$\upsilon=\lambda/T=\omega/k, \tag{9.1}$$

где k – волновое число $k=2\pi/\lambda$, T – период колебаний.

б) длина волны λ и частота ν

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\upsilon}{\lambda}. \tag{9.2}$$

Разность фаз колебаний $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ – в двух точках среды, расстояние между которыми $\Delta x=x_2-x_1$ равняется

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi\Delta x}{\lambda}. \tag{9.3}$$

Интерференция – это процесс наложения нескольких волн, в результате которого происходит перераспределение интенсивности в волновом поле. Максимумы интенсивности наблюдаются при условии, что разность фаз равна

$$\Delta\varphi=2n\pi, \tag{9.4}$$

где $n=0, 1, 2,\ldots$.

Минимумы интенсивности образуются при разности фаз

$$\Delta\varphi=(2n+1)\pi, \tag{9.5}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Скорость звука в газе можно рассчитать по формуле

$$\upsilon_{зв}=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \tag{9.5}$$

где γ – показатель адиабаты газа, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура, M – молярная масса газа.

Задачи

9.1. По водной поверхности распространяется волна со скоростью 6 м/с. Определить период волны и ее частоту, если длина волны 3 м.

9.2. Найти длину волны основного тона ноты «ля». Частота 435 Гц, скорость звука в воздухе 340 м/с.

9.3. Взрыв произошел в воде вблизи ее поверхности. Звук от взрыва пришел к регистрирующему прибору по воде на 15 с раньше, чем по воздуху. Скорость звука в воде – 1450 м/с, в воздухе – 340 м/с. Определите расстояние, на котором произошел взрыв.

9.4. При измерении глубины моря под кораблем при помощи эхолота оказалось, что между моментами, когда посылается и принимается звуковой сигнал, проходит 0,6 с. Определить по этим данным глубину моря под кораблем. Скорость звука в воде 1450 м/с.

9.5. В безветренную погоду с лодки в воду озера бросили якорь. Возникшая волна дошла до берега через 50 с. При этом расстояние между соседними гребнями волн составляло 0,5 м, и за 5 с наблю-

далось 20 всплесков волн о берег. Определить расстояние от лодки до берега.

9.6. Стальную деталь проверяют ультразвуковым дефектоскопом, работающим на частоте 1 МГц. Отраженный от дефекта сигнал возвратился на поверхность металла через 8 мкс после испускания. Зная, что длина ультразвуковой волны 5 мм, определить, на какой глубине находится дефект. Скорость звука в стали 5000 м/с.

9.7. Эхо ружейного выстрела дошло до стрелка через 4 с после выстрела. Определить расстояние между стрелком и преградой, от которой звук отразился. Скорость звука в воздухе 340 м/с.

9.8. Определить скорость звука в металле, если известно, что расстояние между ближайшими точками звуковой волны, отличающимися по фазе на π, равно 2 м. Считать частоту звуковой волны равной 1,25 кГц.

9.9. В упругой среде распространяется механическая волна со скоростью 6 м/с и периодом колебаний точек среды относительно положения равновесия 0,5 с. Определить минимальное расстояние между двумя точками среды, колеблющимися в одинаковой фазе.

9.10. Две точки находятся на расстоянии 50 см друг от друга на прямой, вдоль которой распространяется волна со скоростью 50 м/с. Период колебаний 0,05 с. Найти разность фаз колебаний в этих точках.

9.11. Определить разность фаз колебаний источника волн, находящегося в упругой среде, и точки этой среды, отстоящей на 2 м от источника. Частота колебаний равна 5 Гц. Волны распространяются со скоростью 40 м/с.

9.12. Волна распространяется в упругой среде со скоростью 100 м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно 1 м. Определить частоту колебаний.

9.13. Волна распространяется в упругой среде со скоростью 150 м/с. Определить частоту колебаний, если минимальное расстояние между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно 0,75 м.

9.14. Звуковые колебания с частотой 450 Гц и амплитудой 0,3 мм распространяются в упругой среде. Длина волны 0,8 м. Определить скорость распространения волны и максимальную скорость частиц среды.

9.15. При переходе звука частотой 1 кГц из воздуха в воду длина волны увеличивается на 1,11 м. Скорость звука в воздухе 340 м/с. Какова скорость звука в воде?

9.16. На поверхности океана длина волны достигает 300 м, а ее циклическая частота – 0,46 $с^{-1}$. Определить скорость распространения волны.

9.17. Наблюдатель услышал звуковой сигнал через 4 с после начала работы источника. На каком расстоянии от источника находится наблюдатель, если частота звука 1 кГц, а длина звуковой волны 32 см?

9.18. Источник с частотой 1000 Гц и амплитудой 0,5 мм возбуждает в упругом шнуре волну длиной 0,35 м. Найти скорость распространения колебаний и максимальную скорость колеблющихся точек шнура.

9.19. Выстрел произведен вертикально вверх. Определить начальную скорость пули, если звук выстрела и пуля достигают высоты 850 м одновременно.

9.20. Рыболов заметил, что за 10 с поплавок его удочки совершил на волнах 20 колебаний, а расстояние между соседними гребнями волн 1,2 м. Определить скорость распространения волн в озере.

9.21. Определить частоту звуковых колебаний в стали, если расстояние между ближайшими точками бегущей звуковой волны, фазы колебания которых отличаются на π, равно 2,5 м. Скорость звука в стали принять равной 5000 м/с.

9.22. Волна распространяется со скоростью 6 м/с и частотой 4 Гц. Определить разность фаз колебаний точек среды, отстоящих друг от друга на расстояние 50 см.

9.23. Два когерентных источника колеблются в одинаковой фазе с частотой 400 Гц. Скорость распространения колебаний в среде 1 км/с. Определить, при какой наименьшей разности хода будет наблюдаться максимальное ослабление волн.

9.24. Два когерентных источника колеблются в одинаковой фазе с частотой 400 Гц. Скорость распространения колебаний в среде 1 км/с. Определить, при какой наименьшей разности хода будет наблюдаться максимальное усиление волн.

9.25. Найти разность фаз колебаний двух точек среды, в которой распространяется упругая волна длиной 2 см, если первая точка находится на расстоянии 50 см от источника колебаний, а вторая – на расстоянии 60 см от источника.

9.26. Звуковые колебания с частотой 500 Гц и амплитудой 0,25 мм распространяются в упругой среде. Длина волны 0,7 м. Определить скорость распространения волны и максимальную скорость частиц среды.

9.27. В упругой среде распространяется механическая волна со скоростью 6 м/с и периодом колебаний точек среды относительно

положения равновесия 0,5 с. Определить минимальное расстояние между двумя точками среды, колеблющимися в одинаковой фазе.

9.28. Определить длины звуковых волн человеческого голоса с предельными частотами от 64 до 1300 Гц при температуре воздуха 15° С.

9.29. Расстояние между первым и четвертым узлами стоячей волны 18 см. Определить длину бегущей волны.

9.30. Найти разность фаз колебаний двух точек среды, отстоящих от источника колебаний на расстояниях $x_1 = 10$ м и $x_2 = 16$ м. Период колебаний $T = 0{,}04$ с, скорость распространения волны $\upsilon = 300$ м/с.

10. Уравнение волны. Энергия и интенсивность волны. Эффект Доплера

Теоретические сведения

Уравнением плоской волны называется величина $\zeta(\vec{r},t)$, определяющая смещение точек среды в момент времени t, которые находятся на расстоянии $\vec{r}$ от источника

$$\xi(\vec{r},t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}), \qquad (10.1)$$

где A – амплитуда волны, $\vec{k}$ – волновой вектор, определяющий направление распространения волны. Модуль $\vec{k}$ равен волновому числу.

Для плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx). \qquad (10.2)$$

Уравнение сферической незатухающей монохроматической волны

$$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr). \qquad (10.3)$$

Амплитуда сферической незатухающей волны описывается выражением

$$A(r) = \frac{A_0}{r}, \qquad (10.4)$$

где A_0 – постоянная величина, определяемая мощностью источников.

При затухании волны в среде уравнение плоской волны будет иметь вид

$$\xi(x,t) = A_0 e^{-\gamma x}\cos(\omega t - kx), \qquad (10.5)$$

где γ – коэффициент затухания волны.

Уравнение сферической волны с затуханием

$$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r}e^{-\gamma r}\cos(\omega t - kr). \qquad (10.6)$$

Амплитуда затухающей плоской волны имеет вид

$$A(x) = A_0 e^{-\gamma x}. \qquad (10.7)$$

Амплитуда затухающей сферической волны, соответственно, равна

$$A(r) = \frac{A_0}{r}e^{-\gamma r}. \qquad (10.8)$$

Энергия волны W, заключенной в некотором объеме V,

$$W = \langle w\rangle V, \quad \langle w\rangle = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2}, \qquad (10.9)$$

где $\langle w\rangle$ – средняя объемная плотность энергии волны, ρ – плотность среды.

Интенсивность звуковой волны I (энергия, переносимая звуком в единицу времени через единичную площадь, перпендикулярную к направлению распространения волны) связана со скоростью волны υ и средней объемной плотностью энергии $\langle w\rangle$ соотношением:

$$I = \langle w\rangle\upsilon. \qquad (10.10)$$

Мощность N точечного изотропного источника звука связана с интенсивностью I звука на расстоянии r от источника соотношением

$$N = I\cdot 4\pi r^2. \qquad (10.11)$$

Формула (10.11) справедлива при отсутствии затухания волны в среде.

Акустический эффект Доплера заключается в изменении частоты принимаемого звукового сигнала

$$\nu = \frac{\upsilon_{зв} \pm u_{пр}}{\upsilon_{зв} \pm u_{ист}}\nu_0, \qquad (10.12)$$

где ν – частота звука, воспринимаемая движущимся приемником, $v_{зв}$ – скорость звука в среде (не зависит от скорости источника!), $u_{пр}$ – скорость приемника относительно среды, $u_{ист}$ – скорость источника звука относительно среды; ν_0 – частота звука, испускаемого источником. Знаки (+) или (–) в формуле выбираются из соображения, что при встречном движении частота принимаемого сигнала увеличивается.

Стоячие волны возникают вблизи границы раздела двух сред в результате интерференции падающей и отраженной волны. При этом возникают так называемые узлы и пучности стоячей волны. В узлах колебания отсутствуют, а в пучностях амплитуда колебаний максимальна. Расстояния Δx между соседними узлами и пучностями стоячей волны одинаковы и равны половине длины волны.

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2\nu}, \qquad (10.13)$$

где v – фазовая скорость волны, а ν – ее частота в герцах.

Задачи

10.1. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x, имеет следующий вид: $\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$. Период колебаний точек среды равен 1 мс, длина волны 34 см, амплитуда колебаний 5 мкм. Найти смещение точек среды, находящихся от источника на расстоянии 51 см через 2 мс после начала колебаний.

10.2. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x, имеет следующий вид: $\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$. Период колебаний точек среды равен 1 мс, длина волны 34 см, амплитуда колебаний 5 мкм. Найти скорость точек среды, находящихся от источника на расстоянии 51 см через 2 мс после начала колебаний.

10.3. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x, имеет следующий вид: $\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$. Период колебаний точек среды равен 1 мс, длина волны 34 см, амплитуда колебаний 5мкм. Найти ускорение точек среды, находящихся от источника на расстоянии 51 см через 2 мс после начала колебаний.

10.4. Плоская звуковая волна имеет период $T = 3$ мс, амплитуду $A = 0{,}2$ мм, длину волны $\lambda = 1{,}2$ м. Для точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние $x = 2$ м, найти смещение $\xi(x,t)$ в момент $t = 7$ мс. Начальную фазу колебаний принять равной нулю.

10.5. Плоская звуковая волна имеет период $T = 3$ мс, амплитуду $A = 0{,}2$ мм, длину волны $= 1{,}2$ м. Для точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние $x = 2$ м, найти скорость точек среды в момент $t = 7$ мс. Начальную фазу колебаний принять равной нулю.

10.6. Плоская звуковая волна имеет период $T = 3$ мс, амплитуду $A = 0{,}2$ мм, длину волны $\lambda = 1{,}2$ м. Для точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние $x = 2$ м, найти ускорение точек среды в момент $t = 7$ мс. Начальную фазу колебаний принять равной нулю.

10.7. Волна с периодом $T = 1{,}2$ с и амплитудой колебаний $A = 2$ см распространяется со скоростью $v = 15$ м/с. Чему равно смещение $\xi(x,t)$ точки, находящейся на расстоянии $x = 45$ м от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний прошло время $t = 4$ с?

10.8. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 10 м/с. Амплитуда колебаний точек шнура 5 см, а период колебаний 1 с. Найти смещение точки, расположенной на расстоянии 9 м от источника колебаний в момент времени 2,5 с.

10.9. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 10 м/с. Амплитуда колебаний точек шнура 5 см, а период колебаний 1 с. Найти скорость точки, расположенной на расстоянии 9 м от источника колебаний в момент времени 2,5 с.

10.10. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 10 м/с. Амплитуда колебаний точек шнура 5 см, а период колебаний 1 с. Найти ускорение точки, расположенной на расстоянии 9 м от источника колебаний в момент времени 2,5 с.

10.11. Чему равна интенсивность волны, уравнение которой $\xi(x,t) = 10\cos(1020t - 3x)$ мкм, t – в секундах, x – в метрах? Плотность среды 1,2 кг/м^3.

10.12. Уравнение плоской звуковой волны имеет вид $\xi(x,t) = 60\cos(1800t - 5{,}3x)$ мкм, t – в секундах, x – в метрах. Найти отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны, амплитуду колебаний скорости частиц среды и ее отношение к скорости распространения волны.

10.13. По цилиндрической трубе диаметром 20 см и длиной 5м, заполненной сухим воздухом, распространяется звуковая волна со средней за период интенсивностью 50 мВт/м^2. Найти энергию волны в трубе. Скорость звука в воздухе 332 м/с.

10.14. Интенсивность звука 1 Вт/м^2. Определить среднюю объемную плотность энергии звуковой волны $\langle w \rangle$. Скорость звука в воздухе 332 м/с.

10.15. Мощность изотропного точечного источника звуковых волн 10 Вт. Найти среднюю объемную плотность энергии $\langle w \rangle$ на расстоянии 10 м от источника. Скорость звука 225 м/с.

10.16. Найти мощность точечного изотропного источника звука, если на расстоянии 25 м от него интенсивность звука 20 мВт/м^2. Какова средняя объемная плотность энергии $\langle w \rangle$ на этом расстоянии? Скорость звука 332 м/с.

10.17. Найти коэффициент затухания звуковой волны, если на расстояниях 10 м и 20 м от точечного изотропного источника звука значения интенсивности звуковой волны отличаются друг от друга в 4,5 раза.

10.18. Определить длину бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между первой и седьмой пучностями равно 15 см.

10.19. Определить длину бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между первым и четвертым узлами равно 15 см.

10.20. Мимо неподвижного электровоза, гудок которого дает сигнал с частотой 300 Гц, проезжает поезд со скоростью 40 м/с. Какова кажущаяся частота тона для пассажира, когда поезд 1) приближается к электровозу; 2) удаляется от него? Скорость звука 340 м/с.

10.21. Мимо железнодорожной платформы проходит электропоезд. Наблюдатель, стоящий не платформе, слышит звук сирены поезда. Когда поезд приближается, кажущаяся частота звука 1100 Гц, когда удаляется – 900 Гц. Найти скорость поезда и частоту звука, издаваемого сиреной. Скорость звука 340 м/с.

10.22. Поезд проходит мимо станции со скоростью 36 км/ч . Частота тона гудка электровоза равна 300 Гц. Определить скачок частоты тона гудка для человека, стоящего на платформе, при прохождении поезда. Скорость звука в воздухе 340 м/с.

10.23. На шоссе сближаются две автомашины со скоростями 108 км/ч и 72 км/ч. Первая из них подает звуковой сигнал частотой 600 Гц. Найти кажущуюся частоту звука, воспринимаемого водителем второй автомашины, в двух случаях: 1) до встречи и 2) после встречи. Скорость звука 340 м/с.

10.24. Поезд проходит со скоростью 54 км/ч мимо неподвижного приемника и подает звуковой сигнал. Приемник воспринимает скачок частоты 53 Гц. Скорость звука 340 м/с. Определить частоту тона звукового сигнала гудка поезда.

10.25. Два катера движутся навстречу друг другу. С первого катера, движущегося со скоростью 10 м/с, посылается сигнал частотой 50 кГц. После отражения от второго катера сигнал принят первым катером с частотой 52 кГц. Найти скорость второго катера. Скорость звука в воде 1500 м/с.

10.26. За сколько времени звуковые колебания пройдут расстояние l между точками 1 и 2, если температура воздуха между ними

меняется линейно от T_1 до T_2? Скорость звука в воздухе $v = \alpha\sqrt{T}$, где α – постоянная.

10.27. Плоская продольная упругая волна распространяется в положительном направлении оси x в среде с плотностью $\rho = 4{,}0$ г/см^3 и модулем Юнга $E = 100$ ГПа. Найти проекцию скорости u_x частиц среды в точках, где относительная деформация среды $\varepsilon = 0{,}010$.

10.28. Точечный изотропный источник испускает звуковые колебания. На расстояниях $r_0 = 5{,}0$ м и $r = 10{,}0$ м амплитуды смещения отличаются в 3 раза. Найти коэффициент затухания волны.

10.29. На оси x находятся приемник и источник звуковых колебаний с частотой $\nu_0 = 2000$ Гц. Источник совершает гармонические колебания вдоль этой оси с круговой частотой ω и амплитудой $A = 50$ см. При каком значении ω ширина частотного интервала, воспринимаемого неподвижным источником, будет составлять $\Delta\nu = 200$ Гц? Скорость звука $v = 340$ м/с.

10.30. Стальная струна длиной $l = 100$ см и диаметром $d = 0{,}50$ мм дает основной тон частоты $\nu = 256$ Гц. Найти силу ее натяжения.

ТЕРМОДИНАМИКА

11. Первое начало термодинамики

Теоретические сведения

Термодинамика устанавливает связи между различными макроскопическими параметрами систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия или совершающих равновесный (квазистатический) процесс. Основой термодинамики являются установленные на опыте фундаментальные законы.

Первый закон (начало) термодинамики представляет собой обобщенный закон сохранения энергии. Количество теплоты Q, сообщенное системе, идет на изменение внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ и на совершение работы A_{12} системы над внешними телами:

$$Q = \Delta U + A_{12},\ A_{12} = -A'_{12}, \tag{11.1}$$

где A'_{12} – работа, совершенная над системой.

Внутренняя энергия тела есть функция состояния системы, ее изменение ΔU не зависит от пути перехода из состояния 1 в состояние 2. Работа же A_{12} зависит от пути перехода.

Простейшей макроскопической системой является идеальный газ. Термодинамические параметры – давление p, объем V и температура T связаны уравнением Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT;\ pV = \nu RT, \tag{11.2}$$

где m – масса, M –молярная масса газа, $\nu = \frac{m}{M}$ – количество вещества, R=8,31 Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная.

Теплоемкость характеризуется теплотой, которую надо сообщить веществу для изменения его температуры. Различают молярную C и удельную c теплоемкости, который связаны формулой

$$C = cM. \tag{11.3}$$

Для идеального газа определяют молярную теплоемкость при постоянном объеме C_v и постоянном давлении C_p, которые связаны уравнением Майера

$$R = C_p - C_v. \tag{11.4}$$

Внутренняя энергия идеального газа определяется абсолютной температурой и равна произведению числа молекул $N = \nu N_A$ на среднюю энергию теплового движения $\langle\varepsilon\rangle$ одной молекулы

$$U = N\langle\varepsilon\rangle. \tag{11.5}$$

Здесь $N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}\ \frac{1}{\text{моль}}$ – число Авогадро.

Из молекулярно–кинетической теории газов известно, что

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT, \tag{11.6}$$

где k–постоянная Больцмана, $k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К, i – число степеней свободы молекулы газа.

Из формул (11.5) и (11.6) получается формула внутренней энергии

$$U = \frac{i}{2}\nu RT. \tag{11.7}$$

Из определения теплоемкостей можно получить соотношения

$$C_v = \frac{i}{2}R,\quad C_p = \frac{i+2}{2}R. \tag{11.8}$$

Физическая величина

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} \tag{11.9}$$

называется показателем адиабаты.

Среди различных процессов, которые могут протекать с идеальным газом, выделяют изопроцессы и адиабатический процесс. Для каждого процесса можно записать уравнение процесса, первое начало термодинамики, а также формулу работы газа.

Изотермический процесс (T=const):

$$pV = \text{const};\ \Delta U = 0;\ Q = A_{12};\ A_{12} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{11.10}$$

Изохорный процесс (V=const):

$$\frac{p}{T} = \text{const};\ Q = \Delta U = \nu C_v\Delta T;\ A_{12} = 0. \tag{11.11}$$

Изобарный процесс ($p = \text{const}$):

$$\frac{V}{T} = \text{const};\ Q = \Delta U + A_{12};\ A_{12} = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R\Delta T. \qquad (11.12)$$

Адиабатический процесс ($Q = 0$):

$$pV^{\gamma} = \text{const};\ \Delta U + A_{12} = 0;\ A_{12} = -\Delta U = \nu C_{\upsilon}(T_1 - T_2). \qquad (11.13)$$

Работу при адиабатическом процессе можно также вычислить по формуле

$$A = \frac{m}{M}\frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right]. \qquad (11.14)$$

Во всех перечисленных выше процессах масса газа остается постоянной.

Работа, связанная с изменением объема газа, в общем случае вычисляется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV, \qquad (11.15)$$

где V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа.

Задачи

11.1. Кислород под давлением 0,2 МПа в объеме 1 м^3 сначала нагревают при постоянном давлении до 3 м^3, а затем при постоянном объеме до давления 0,5 МПа. Найти изменение внутренней энергии газа.

11.2. Кислород под давлением 0,2 МПа в объеме 1 м^3 сначала нагревают при постоянном давлении до 3 м^3, а затем при постоянном объеме до давления 0,5 МПа. Найти теплоту, переданную газу в этих процессах.

11.3. В сосуде находится 0,1 моля трехатомного газа при температуре 300 К. Сначала газ адиабатически расширился в 8 раз, а затем изотермически вернулся к первоначальному объему. Найти работу, совершенную газом в этих процессах.

11.4. В сосуде находится 0,1 моля трехатомного газа при температуре 300 К. Сначала газ адиабатически расширился в 8 раз, а затем изотермически вернулся к первоначальному объему. Найти теплоту, полученную газом в этих процессах.

11.5. Кислород нагревается при постоянном давлении 80 кПа. Его объем увеличивается от 1 м^3 до 3 м^3. Определить изменение внутренней энергии газа.

11.6. Кислород нагревается при постоянном давлении 80 кПа. Его объем увеличивается от 1 м^3 до 3 м^3. Определить полученную газом теплоту.

11.7. Определить работу, совершенную азотом, которому при постоянном давлении был передан 21 кДж теплоты.

11.8. Кислород массой 200 г занимает объем 100 л под давлением 200 кПа. При постоянном давлении газ расширился до объема 300 л, затем при постоянном объеме давление увеличилось до 500 кПа. Найти изменение внутренней энергии газа.

11.9. Кислород массой 200 г занимает объем 100 л под давлением 200 кПа. При постоянном давлении газ расширился до объема 300 л, затем при постоянном объеме давление увеличилось до 500 кПа. Найти теплоту, полученную газом в этих процессах.

11.10. Какая доля теплоты, подводимой к идеальному газу в изобарическом процессе, расходуется на увеличение внутренней энергии газа. Рассмотреть одноатомный, двухатомный и трехатомный газы.

11.11. Найти изменение объема водорода, получившего при постоянном давлении 200 кПа 700 Дж теплоты.

11.12. Найти молярную массу газа, если для изобарического нагревания 0,5 кг этого газа на 10 К требуется на 1,48 кДж теплоты больше, чем для изохорического.

11.13. Один моль идеального газа изобарически нагревается на 77 К при передаче 1600 Дж теплоты. Найти показатель адиабаты для этого газа.

11.14. Один моль идеального газа изобарически нагревается на 77 К при передаче 1600 Дж теплоты. Найти изменение внутренней энергии газа.

11.15. Три моля идеального газа, находившегося при температуре 276,5 К изотермически расширили в 5 раз, а затем изохорически нагрели до первоначального давления. За весь процесс газу сообщили 80 кДж теплоты. Найти показатель адиабаты для этого газа.

11.16. Водород массой 6,5 г изотермически расширяется вдвое за счет притока тепла извне при температуре 300 К. Найти теплоту, сообщенную газу.

11.17. В сосуде под поршнем находится 1 г азота. Какое количество теплоты надо затратить, чтобы нагреть газ на 10 К?

11.18. В сосуде под поршнем массой 10 кг находится 1 г азота. На какую высоту поднимется поршень при нагревании газа на 10 К?

11.19. В сосуде под поршнем массой 3,57 кг находится гремучий газ. Какое количество теплоты выделяется при его взрыве, если внутренняя энергия газа увеличилась на 333 Дж, а поршень поднялся на 20 см?

11.20. Давление воздуха в комнате объемом 50 м^3 увеличилось от 100 кПа до 105 кПа. Считая воздух идеальным двухатомным газом, найти приращение его внутренней энергии.

11.21. Некоторая масса азота под давлением 100 кПа имела объем 5 л, а под давлением 300 кПа – 2 л. Переход из первого состояния во второе был проведен в два этапа: сначала по изобаре, потом по изохоре. Найти количество теплоты, переданное при этом переходе.

11.22. Порция азота нагревается от 300 К до 400 К таким образом, что объем газа поддерживается прямо пропорциональным его абсолютной температуре $V=\alpha T$, где $\alpha=10^{-5}$ м^3/К. Начальное давление азота 100 кПа. Найти работу газа в этом процессе.

11.23. Порция азота нагревается от 300 К до 400 К таким образом, что объем газа поддерживается прямо пропорциональным его абсолютной температуре $V=\alpha T$, где $\alpha=10^{-5}$ м^3/К. Начальное давление азота 100 кПа. Найти изменение внутренней энергии газа в этом процессе.

11.24. Уравнение процесса двухатомного идеального газа задано графически в координатах (p,V) отрезком прямой, соединяющим точки (100 кПа, 5 л) и (125 кПа, 6 л). Найти изменение внутренней энергии газа в этом процессе.

11.25. Уравнение процесса двухатомного идеального газа задано графически в координатах (p,V) отрезком прямой, соединяющим точки (100 кПа, 5 л) и (125 кПа, 6 л). Найти работу газа в этом процессе.

11.26. В вертикальную тонкую трубку с запаянным нижним концом налили 50 г ртути. Под ней осталась запертой порция воздуха, который следует считать идеальным двухатомным газом. При нагревании воздуха ртуть поднялась на 1 см. Найти количество теплоты, полученное воздухом. Тепловым расширением ртути и массой воздуха по сравнению с массой ртути пренебречь.

11.27. В вертикальную тонкую трубку с запаянным нижним концом налили 50 г ртути. Под ней осталась запертой порция воздуха, который следует считать идеальным двухатомным газом. При нагревании воздуха на 10 К ртуть поднялась на 1 см. Найти количество молей воздуха запертого под ртутью. Тепловым расширением ртути и массой воздуха по сравнению с массой ртути пренебречь.

11.28. Найти внутреннюю энергию 20 г кислорода при температуре 20 °С. Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения молекул, а какая – на вращательное движение?

11.29. Для нагревания некоторой массы газа на $\Delta T_1=50$ К при $p=const$ необходимо затратить количество теплоты $Q_1=670$ Дж. Если эту массу газа охладить на $\Delta T_2=100$ К при $V=const$, то выделится $Q=1005$ Дж. Какое число степеней свободы i имеют молекулы этого газа.

11.30. Производится сжатие некоторой массы двухатомного газа один раз изотермически, второй раз – адиататно. Начальные температура и давление сжимаемого газа оба раза одинаковы. Конечное давление в 2 раза больше начального. Найти отношение работ сжатия при адиабатном и изотермическом процессе.

12. Энтропия

Теоретические сведения

Существует несколько формулировок второго начала термодинамики. Одним из них считается определение энтропии как функции состояния системы.

Отношение малого количества теплоты δQ к абсолютной температуре T для равновесного процесса есть изменения энтропии

$$dS=\frac{\delta Q}{T}. \qquad (12.1)$$

При переходе системы из одного состояния в другое происходит изменение энтропии

$$\Delta S=\int_1^2\frac{\delta Q}{T}, \qquad (12.2)$$

где 1 и 2 – пределы интегрирования, соответствующие начальному и конечному состояниям системы. Так как изменение энтропии не зависит от пути перехода, то интегрирование производится по любому пути.

Для идеального газа изменение энтропии можно рассчитать по формуле

$$\Delta S=\nu C_v\ln\frac{T_2}{T_1}+\nu R\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (12.3)$$

Уравнение политропного процесса

$$pV^n = \text{const}, \tag{12.4}$$

где n – показатель политропы

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_v}. \tag{12.5}$$

Задачи

12.1. На сколько изменится энтропия 100 г олова при его затвердевании? Температура затвердевания олова 232°С, удельная теплота плавления 60 кДж/кг.

12.2. Расплавленный свинец массой $m = 80$ г при температуре плавления 327 °С вылили на лед (температура льда $t_0 = 0$ °С). Найти изменение энтропии системы свинец-лед при охлаждении свинца до температуры льда. Лед считать неограниченным «резервуаром холода», плавлением льда пренебречь. Удельная теплоемкость свинца 126 Дж/кг·К, удельная теплота плавления 22,6 кДж/кг.

12.3. Некоторое количество воды нагревают от 10 °С до 100 °С и дают ей полностью выкипеть. Какой должна быть масса воды, чтобы ее энтропия в данном процессе изменилась на 3,61 кДж/К. Парообразованием при t<100 °С пренебречь.

12.4. Нагреватель, сохраняющий постоянную температуру 100 °С (неограниченный тепловой резервуар) приводится в контакт с запаянным сосудом, в котором содержится 1 л кислорода при *нормальных условиях* (давлении 101,3 кПа и температуре 0°С). На какую величину изменится при этом энтропия системы газ-резервуар?

12.5. 10 г свинца нагрели от некоторой температуры до точки плавления 327 °С и расплавили. Известно, что при нагревании было затрачено в 1,4 раза больше тепла, чем при плавлении. Найти изменение энтропии свинца в этом процессе.

12.6. Кубик льда сначала расплавили при температуре 0 °С, а затем полученную воду нагрели до некоторой температуры t. Найти такое значение t, при котором изменение энтропии в первом процессе равно ее изменению во втором процессе. Удельная теплота плавления льда 335 кДж/кг.

12.7. Железо массой 200 г при температуре 100 °С опущено в калориметр, в котором находится 300 г воды при температуре 12 °С. Пренебрегая теплоемкостью калориметра, найти изменение энтропии системы при уравнивании температур. Удельная теплоемкость железа 500 Дж/кг·К.

12.8. При погружении в водоем свинцовое грузило массы m охлаждается до температуры воды t_0 (водоем считается неограниченным резервуаром холода, его температура постоянна). 1) Доказать, что в результате этого процесса энтропия системы возрастает. 2) Вычислить ΔS системы при данных: $m = 20$ г, $t_1 = 27$ °С (исходная температура грузила), $t_0 = 7$ °С.

12.9. Смешивают массу воды m_1 при температуре t_1 с массой воды m_2 при температуре t_2. 1) Для случая $m_1 = m_2$ доказать, что $dS \geq 0$, т.е. энтропия системы не убывает. 2) Найти изменение энтропии в процессе выравнивания температур при значениях $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 6$ кг, $t_1 = 80$ °С, $t_2 = 20$ °С.

12.10. Найти приращение энтропии 2 молей воды, взятой при $t = 100$ °С, если вода сначала испаряется при данной температуре, затем полученный пар нагревается до температуры 200 °С. Теплоемкость пара выражается эмпирической формулой $C_p = 33{,}83 + 0{,}0084T + 3 \cdot 10^{-8} T^2$ Дж/(моль·К).

12.11. Кусок льда охлаждается при атмосферном давлении и начальной температуре 0 °С до –10 °С. Найти изменение энтропии льда в расчете на единицу массы, если удельная теплоемкость льда выражается формулой $c_p = 2212 + 7{,}5t$ Дж/(кг·К), где t – температура по Цельсию.

12.12. Найти приращение энтропии металлического бруска массы 2 кг при нагревании его от 300 К до 400 К, если теплоемкость металла выражается формулой $c = a + bT$, где $a = 0{,}77$ Дж/(г К), $b = 0{,}46$ мДж/(г К^2).

12.13. 1 моль кислорода нагрели от 30 К до 330 К, причем в ходе процесса объем менялся пропорционально $T^{1/2}$. Найти изменение энтропии кислорода, считая газ идеальным.

12.14. 1 моль одноатомного идеального газа подвергся расширению в 2 раза в ходе политропного процесса $pV^2 = \text{const}$. Найти изменение энтропии газа.

12.15. 1 моль одноатомного идеального газа получил небольшое относительное расширение $\alpha = 1\%$ в ходе политропного процесса $pV^n = \text{const}$. При этом энтропия газа изменилась на $\Delta S = 0{,}005$ Дж/К. Найти показатель политропы n.

12.16. До какой температуры нужно довести 4 кг кислорода, взятого при температуре 227 °С для того, чтобы, не меняя объема газа, уменьшить его энтропию на 1,31 кДж/К?

12.17. При нагревании 8 г аргона его абсолютная температура увеличилась в 2 раза. Определить изменение энтропии при а) изобарическом и б) изохорическом нагревании.

12.18. 1 кмоль гелия, изобарически расширяясь, увеличил свой объем в 4 раза. 1) Найти изменение энтропии газа. 2) Представить себе некий газ 2, который в аналогичном процессе увеличивает свою температуру в 3 раза. Каким показателем адиабаты должен обладать этот газ, чтобы при указанном процессе произошло такое же изменение энтропии, как в первом случае?

12.19. В результате изотермического сжатия 887 дм^3 воздуха, находящегося при температуре 30 °С и начальном давлении 0,1 МПа, его энтропия уменьшилась на 673 Дж/К. Определить объем воздуха в конце процесса.

12.20. Определить изменение энтропии 1 кг углекислого газа в процессе сжатия от давления 0,2 МПа при температуре 40 °С до давления 4,5 МПа при температуре 253 °С (показатель адиабаты углекислого газа $\gamma = 1{,}30$).

12.21. Кислород массой 1 кг при давлении 0,5 МПа и температуре 127 °С изобарически расширяют, увеличивая его объем в 2 раза, а затем изотермически сжимают до давления 4 МПа. Определить суммарное изменение энтропии.

12.22. Два моля идеального газа сначала изохорически охладили, а затем изобарически расширили так, что температура газа стала равна первоначальной. Найти приращение энтропии газа в этом процессе, если его давление в данном процессе изменилось в 3,3 раза.

12.23. Гелий массой 1,7 г адиабатически расширили в 3,0 раза и затем изобарически сжали до первоначального объема. Найти приращение энтропии газа в этом процессе.

12.24. Найти приращение энтропии двух молей идеального газа с показателем адиабаты 1,3, если в результате некоторого процесса объем газа увеличился в 2 раза, а давление уменьшилось в 3 раза.

12.25. 1 моль идеального газа при изотермическом расширении увеличил свой объем в 3 раза, а затем газ изохорически нагрели, повысив его температуру на 60 К. Чему равно изменение энтропии в процессе, если работа, совершенная газом, равна 2,70 кДж? Показатель адиабаты газа равен 1,40.

12.26. 1 кг воздуха сжимают адиабатически так, что его объем уменьшается в 6 раз, а затем при постоянном объеме давление возрастает в 1,5 раза. Определить изменение энтропии в этом процессе (молярная масса воздуха $M = 0{,}029$ кг/моль, показатель адиабаты $\gamma = 1{,}40$). Изобразить процессы на диаграмме (p,V).

12.27. Сосуд емкостью 40 л разделили непроницаемой перегородкой. В одной части находится 0,2 моля воздуха при нормальных условиях. Воздух в другой части откачан. Затем перегородку удаляют, позволяя газу распространиться по всему сосуду. Считая этот процесс расширением газа в пустоту, найти изменение энтропии газа.

12.28. В калориметр, содержащий 250 г воды при температуре 23°С, бросают 27 г льда при 0°С. Определить изменение энтропии к моменту окончания таяния льда. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

12.29. Найти приращение энтропии 2 кг воды при нагревании от 10 °С до 100 °С и обращении её при этой температуре в пар.

12.30. Масса $m = 10$ г кислорода нагревается от температуры $T_1 = 323$ К до температуры $T_2 = 423$ К. Определить изменение энтропии при а) изобарическом и б) изохорическом нагревании.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

1. Кинематика

1.1. 30 мин; 30,2 мин; 28,8 мин. **1.2.** 14,7 м/с; 11 м.
1.3. 8,4 с; 7,3 с; 7,8 с. **1.4.** 57 м; 3,4 с. **1.5** 10,13 м/с^2; 216 с.
1.6. 30 с; 225 м. **1.7.** 24 м; 38 м/с; 42 м/с^2. **1.8.** 17 м/с; 4 м/с^2.
1.9. 2,26 с; 33,9 м; 26,7 м/с; 55°48′. **1.10.** 1,22 м; 10 м/с; 11,1 м/с; 26°12′.
1.11. 8,2 м/с^2; 5,4 м/с^2. **1.12.** 2,1 м; 10,0 м; 1,3 с.
1.13. 3,16 с; 41,1 м; 26,7 м/с. **1.14.** 400 м/с. **1.15.** 1,26 рад/с^2; 360 об.
1.16. 0,43 рад/с^2. **1.17.** 6,1 м. **1.18.** 1,2 м. **1.19.** 45°.
1.20. 588 м/с; 2,45 км. **1.21.** 24,5 с; 2,45 км.
1.22. 35,8 м/с; 5,37 м/с^2; 8,22 м/с^2. **1.23.** 1,59 с$^{-1}$.
1.24. 1,2 м/с^2; 168 м/с^2; 168 м/с^2. **1.25.** 3,14 рад/с^2; 25.
1.26. а) 0,24 м, 0, –4,0 м; б) 1,1 с, 9 с, 11 с. **1.27.** а) $\alpha = 60°$; $\alpha = 54{,}8°$.
1.28. a = 0,8 м/с^2. **1.29.** a = 0,7 м/с^2. **1.30.** t = 7 с.

2. Импульс Сила Импульс силы

2.1. 1,33 Н·с. **2.2.** 100 Н·с; 100 Н·с. **2.3.** 1,4 Н·с. **2.4.** 3 Н·с.
2.5. 0,63 Н·с; –0,63 Н·с. **2.6.** 34,6 Н·с. **2.7.** 1,62 м/с; 3,39 м/с.
2.8. –12,5 м/с. **2.9.** 6,3 м/с; –0,57 м/с. **2.10.** 1 м/с; 3 м/с.
2.11. 0,385 м/с; –0,615 м/с. **2.12.** 4,12 м/с. **2.13.** 2,54 м/с.
2.14. 900 м/с **2.15.** S = 4l **2.16.** 0,156 м/с. **2.17.** 1694 м.
2.18. 0,1256 Н·с. **2.19.** 2 Н·с. **2.20.** $S = 2l$. **2.21.** 114 м/с.
2.22. 0,4 м/с. **2.23.** 250 м/с; $\alpha_2 = 36°$. **2.24.** 8,67 м/с. **2.25.** $m_2 = \frac{5}{3}m_1$.
2.26. $F_1 = F_2 = F$; $F_3 = 2F$. **2.27.** 0,082. **2.28.** $\alpha = \operatorname{arctg} k$.
2.29. $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{2}$, $\vartheta = 53°$. **2.30** $N(t) = \alpha^{3/2}R^{1/2}mt^3$; $\langle N\rangle = m\alpha^{3/2}R^{1/2}t^3/4$.

3. Энергия Работа Мощность

3.1 3,8 кН. **3.2** 16 см. **3.3** 1) 9,6 Дж, 2) 86,4 Дж.
3.4 1) 1 м/с, 0,8; 2) 4 м/с, 0,2. **3.5** 16,2 кг. **3.6** 3. **3.7** 6 м/с, 4 м/с.
3.8 99 кН. **3.9** $v = 2/3\sqrt{gh/3}$. **3.10** 20 м. **3.11** $2mgh$. **3.12** 48°, $\sqrt{2gR/3}$.
3.13 1,2 МН/м. **3.14** 22,5 м/с. **3.15** 206 Н/м. **3.16** 7,07 м/с. **3.17** 0,03 м.
3.18 546 м/с. **3.19** 3,84 м/с. **3.20** 3,74 м/с. **3.21** 4,04 с. **3.22** $v_ш > v_ц$.
3.23 14 рад/с; 1,05 м/с; 2,1 м/с. **3.24** 6400 км. **3.25** $\sqrt{4gl}$; $\sqrt{5gl}$.
3.26 $F = \mu g\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)$. **3.27** 0,195 Н.

3.28 $A = \frac{m\omega^2L^2}{2}\left(1 + \frac{1}{k/m\omega^2 - 1}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(\frac{m\omega^2L}{k\left(1 - m\omega^2/k\right)}\right)^2$.

3.29 $x_{max} = mg/k + \sqrt{(mg/k)^2 + 2mgl/k}$. **3.30** 11,25 мДж.

4. Момент импульса Момент силы

4.1. 2,6 рад/с, 1,3 м/с. **4.2.** 2,5 рад/с; 1,67 м/с. **4.3.** 0,157 Н·м.
4.4. 10 об/с. **4.5.** $3g\sin\varphi/2l$. **4.6.** $3g\sin\varphi/2l$. **4.7.** 0,942 м/с.
4.8. 0,167 об/с. **4.9.** 0,283 об/с. **4.10.** 0,904 об/с. **4.11.** 0,349 об/с.
4.12. 0,392 об/с. **4.13.** 0,4 рад/с. **4.14.** 2π/3. **4.15.** 0,00816 рад/с.
4.16. 1,02 рад/с. **4.17.** 2,61 рад/с. **4.18.** 0,00249 Дж.
4.19. 0,000624 Дж. **4.20.** 2,5 рад/с. **4.21.** $6m_2v/((3m_1 + 4m_2)\cdot l)$.
4.22. 6 кг·м^2. **423.** 2,8 м/с^2. **4.24.** 1,4 м/с^2. **4.25.** 3,528 Н; 3,92 Н.
4.26. $L = mg^2t^3/2 - mv_0g(\sin\alpha/2 + \cos\alpha)t^2 + mv_0^2\sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)t$.
4.27. $L = 2mvh$. **4.28.** $\alpha = \frac{2m\varphi}{M + 2m}$. **4.29.** $E_к = 4{,}375mg(\sin\alpha)^2t^2$.
4.30. $\beta = \frac{2mgx}{Rl(M + 2m)}$.

5. СТО. Релятивистская механика

5.1. 60°. **5.2.** 0,82 м. **5.3.** $0{,}8\cdot c$. **5.4.** 1,6. **5.5.** $0{,}82\cdot c$. **5.6.** 1,4 м.
5.7. 1,25 м. **5.8.** 4/3. **5.9.** $0{,}6\cdot c$. **5.10.** $5/13\cdot c$. **5.11.** 0,8 года.
5.12. $0{,}99\cdot c$. **5.13.** 0,1 мс. **5.14.** 92 года. **5.15.** 25 лет. **5.16.** $2\cdot10^8$ лет.
5.17. 26000 лет. **5.18.** 960 кг/м^3. **5.19.** $1/3\cdot c$. **5.20.** $0{,}87\cdot c$.
5.21. $0{,}6\cdot c$. **5.22.** 0,48. **5.23.** $5/13\cdot c$. **5.24.** $0{,}6\cdot c$. **5.25.** $0{,}6\cdot c$.
5.26. $0{,}6\cdot c$. **5.27.** $0{,}125\cdot c$. **5.28.** $0{,}75\cdot c$. **5.29.** $0{,}5\cdot c$. **5.30.** $13/14\cdot c$.

6. Кинематика и динамика гармонических колебаний

6.1 2 мН, 50 мкДж. **6.2.** $x = 0{,}04\sin(\pi t - \pi/3)$ м. **6.3.** 4,4 мН; 0,88 мДж.
6.4. $\varphi = 1{,}3$ рад; $t = 2{,}48$ с. **6.5.** $v = 1{,}36$ м/с.
6.6. 0,4 м/с; 1257 м/с^2; 0,628 м/с; 1974 м/с^2.
6.7. 0,288 м/с^2; 0,096 м/с; 0,173 м/с^2. **6.8.** 2,8 см. **6.9.** 1,78 с.
6.10. 1,09 с. **6.11.** 2 рад/с; 0,4 м/с^2. **6.12.** 10 рад/с; 0,626 с, 0,01 м.
6.13. 0,083 м. **6.14.** $x = 0{,}00369\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{8}\right)$ м. **6.15.** $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$.
6.16. 2,15%. **6.17.** $x = 0{,}0141\sin(\pi t + \pi/4)$ м. **6.18.** 0,5 м, 1,42 с.
6.19. $A = 0{,}0386$ м; $\varphi = 0{,}42\pi$; $x = 0{,}0386\sin\left(\frac{4\pi}{3}t + 0{,}42\pi\right)$ м.

6.20. 0,25 м, 1,00 с. **6.21.** 1,55 с. **6.22.** $x^2/4 + y^2 + xy/2 = 0{,}75$.
6.23. $x^2/4 + y^2/4 = 1$. **6.24.** 1,35 с. **6.25.** $y^2/4 + x^2 = 1$. **6.26.** 1 с.
6.27. 0,047 м/с, 0,074 м/с^2. **6.28.** 1,82 **6.29.** 0,36 м, 1,2 с. **6.30.** 0,1 м.

7. Затухающие колебания
7.1. 1,34 см. **7.2.** 7,85; 2,89; 1,06; 0,39 м/с. **7.3.** 1,22. **7.4.** 0,024.
7.5. 0,25 с$^{-1}$; 3,12 рад/с. **7.6** 0,347. **7.7.** 1,22. **7.8.** 1,49. **7.9.** 6,37 с.
7.10. 8. **7.11.** 1,38 с; 0,69. **7.12.** –0,097 м/с. **7.13.** 0,4 см. **7.14** –0,46 м/с.
7.15. 4,48 с; 0,088 с$^{-1}$. **7.16.** –0,38 м/с. **7.17.** 0 м/с. **7.18.** $1{,}25\cdot10^{-6}$ Дж.
7.19. $1{,}06\cdot10^{-6}$ Дж. **7.20.** –7,74 см/с. **7.21.** 0,4 м/с^2.
7.22. $1{,}6\cdot10^{-4}$ м/с^2. **7.23.** –0,07 м. **7.24.** –0,054 м.
7.25. $x = 0{,}067\exp(-0{,}4t)\cos\left(1{,}57\cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$ м. **7.26.** –0,5 см / с.
7.27. 3,3. **7.28.** 0,70 с. **7.29.** 130. **7.30.** 0,9 с.

8. Вынужденные колебания
8.1. 0,8 рад/с. **8.2.** 1,45 рад/с. **8.3.** $-35^\circ12'$. **8.4.** 1,46 рад/с.
8.5. 6,25 см. **8.6** -45°. **8.7.** 0,06 Н / м. **8.8.** 2,56 рад/с. **8.9.** 1,76 рад/с.
8.10. 1,8 рад/с. **8.11.** 0,28 мН. **8.12.** 0,1 Н. **8.13.** 2,8 рад / с. **8.14.** 0,26 м.
8.15. 6,9 рад/с; 0,07 м. **8.16.** $5{,}1\cdot10^2$ рад/с. **8.17.** 0,1 м; $-\frac{\pi}{3}$.
8.18. 4,5 рад/с. **8.19.** 0,83 мВт. **8.20.** $4{,}5\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; 46,7 мН. **8.21.** 1,8 см.
8.22. $6{,}1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $-72^\circ39'$. **8.23.** 4,7 см. **8.24.** 0,27 Н. **8.25** 3 рад / с.
8.26. 6,3 рад / с; 5. **8.27.** 4 с$^{-1}$; 1,3 с. **8.28.** 6 рад / с; 1,5.
8.29. 0,1 Н. **8.30.** 2,8 рад / с.

9. Основные характеристики волны
9.1. 0,5 с; 2 Гц. **9.2.** 0,78 м. **9.3.** 16650 м. **9.4.** 435 м. **9.5.** 100 м.
9.6. 20 мм. **9.7** 680 м. **9.8.** 5000 м/с. **9.9.** 3 м. **9.10.** 1,26 рад.
9.11. 1,57 рад. **9.12.** 50 Гц. **9.13.** 100 Гц. **9.14.** 360 м/с; 0,848 м / с.
9.15. 1450 м/с. **9.16.** 22 м/с. **9.17.** 1280 м. **9.18.** 350 м/с; 3,14 м/с.
9.19. 350 м/с. **9.20.** 2,4 м/с. **9.21.** 1000 Гц. **9.22.** 2,1 рад. **9.23** 1,25 м.
9.24. 2,5 м. **9.25** 31,4 рад. **9.26.** 350 м/с; 0,785 м / с. **9.27.** 3 м.
9.28. 5,3 м; 0,26 м. **9.29.** 12 см. **9.30.** $\Delta\varphi = \pi$.

10. Уравнение волны.
Энергия и интенсивность волны. Эффект Доплера
10.1. 5 мкм. **10.2.** 0. **10.3.** 200 м/с^2. **10.4.** –0,1 мм. **10.5.** 0,36 м/с.
10.6. 440 м/с^2. **10.7** 1 см. **10.8.** –4 см. **10.9.** 18,5 см/с. **10.10.** 1,6 м/с^2.

10.11. 0,021 Вт/м^2. **1.12.** $0{,}5\cdot10^{-4}$; $3\cdot10^{-4}$. **10.13.** 23,7 мкДж.
10.14 0,3 мДж/м^3. **10.15.** 0,3 мкДж/м^3. **10.16.** 60 мкДж/м^3; 157 Вт.
10.17. $6\cdot10^{-3}$ м$^{-1}$. **10.18.** 5 см. **10.19.** 10 см. **10.20.** 336 Гц; 256 Гц.
10.21. 34 м/с; 990 Гц. **10.22.** 35,4 Гц. **10.23.** 700 Гц; 519 Гц.
10.24. 600 Гц. **10.25.** 19,8 м/с. **10.26.** $t = \frac{2l}{\alpha\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)}$. **10.27.** –50 м/с.
10.28. 0,08 м$^{-1}$. **10.29.** 34 с$^{-1}$. **10.30.** 0,40 кН.

11. Первое начало термодинамики
11.1. 3,25 МДж. **11.2.** 3,65 МДж. **11.3.** 489 Дж. **11.4.** 259 Дж.
11.5. 0,4 МДж. **11.6.** 0,56 МДж. **11.7.** 6 кДж. **11.8.** 325 кДж.
11.9. 40 кДж. **11.10.** 0,6; 0,71; 0,75. **11.11.** 2,5. **11.12.** 0,028 кг / моль.
11.13. 1,67. **11.14.** 960 Дж. **11.15.** 1,4. **11.16.** 5600 Дж. **11.17.** 7,4 Дж.
11.18. 0,03 м. **11.19.** 340 Дж. **11.20.** 625 кДж. **11.21.** –50 Дж.
11.22. 100 Дж. **11.23.** 250 Дж. **11.24.** 625 Дж. **11.25.** 112,5 Дж.
11.26. 17,5 мДж. **11.27.** 2,4 моль. **11.28.** 3,7 Дж; 2,2 Дж; 1,5 Дж.
11.29. 6. **11.30.** 1,5.

12. Энтропия
12.1. –11,9 Дж / К. **12.2.** 7,6 Дж / К. **12.3.** 0,5 кг. **12.4.** 0,041 Дж / К.
12.5. 1,06 Дж / К. **12.6.** 93 °С. **12.7.** 4,2 Дж / К. **12.8.** 0,006 Дж / К.
12.9. 184,3 Дж / К. **12.10.** 218 Дж / К. **12,11.** 81 Дж / (К·кг).
12.12. 535 Дж / К. **12.13.** 2,38 Дж / К. **12.14.** –2,88 Дж / К.
12.15. 1,63. **12.16.** 302 К. **12.17.** 2,88 Дж / К; 1,73 Дж / К.
12.18. 28800 Дж / К; 1,46. **12.19.** 88,7 л. **12.20.** –163,4 Дж / К.
12.21. –91 Дж / К. **12.22.** 19,8 Дж / К. **12.23.** –9,7 Дж / К.
12.24. –11,0 Дж / К. **12.25.** 13,0 Дж / К. **12.26.** 209,1 Дж / К.
12.27. 3,64 Дж / К. **12.28.** 1,83 Дж / К. **12.29.** 14,44 кДж / К.
12.30. 2,46 Дж / К; 1,76 Дж / К.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

1. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольних единиц и их наименования

Наименование	Обозначение	Множитель	Наименование	Обозначение	Множитель
экса	Э	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пэта	П	10^{15}	санти	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	милли	м	10^{-3}
гига	Г	10^{9}	микро	мк	10^{-6}
мега	М	10^{6}	нано	н	10^{-9}
кило	к	10^{3}	пико	п	10^{-12}
гекто	г	10^{2}	фемто	ф	10^{-15}
дека	да	10^{1}	атто	а	10^{-18}

2. Значения фундаментальных физических постоянных

Нормальное ускорение свободного падения	$g = 9{,}807$ м/с^2
Универсальная гравитационная постоянная	$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$
Скорость света в вакууме	$c = 2{,}998 \cdot 10^{8}$ м/с
Число Авогадро	$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23} \dfrac{1}{\text{моль}}$
Нормальные условия	$t = 0\ ^\circ C$, $p = 760$ мм.рт.ст. $= 101{,}325$ кПа
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}380 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Уиверсальная газовая постоянная	$R = 8{,}314$ Дж/(моль · К)
Абсолютный нуль температур	$T = 0$ К, $t = -273{,}15\ ^\circ$C
Атомная единица массы	1 а.е.м. $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг

3. Молярные массы некоторых молекул

Молекула	Молярная масса, кг/моль
водород, H_2	0,002
гелий, He	0,004
азот, N_2	0,028
кислород, O_2	0,032
воздух	0,029

Рекомендуемая литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики: в 3-х т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. М.: Лань, 2016.
2. Савельев И.В. Курс общей физики: в 3-х т. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. М.: Лань, 2016.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика. М.: ФМЛ, 2017.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика. М.: ФМЛ, 2017.
5. Иродов И.Е. Физика. Основные законы. Механика. М.: Бином, 2014.
6. Иродов И.Е. Физика. Основные законы. Волновые процессы. М.: Бином, 2014.
7. Иродов И.Е. Физика. Основные законы. Физика макросистем. М.: Бином, 2014.
8. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Академия, 2016.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕХАНИКА 3
1. Кинематика 3
2. Динамика поступательного движения 8
3. Энергия. Работа. Мощность 12
4. Динамика вращательного движения 17
5. Кинематика специальной теории относительности. Релятивистская механика 23
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ 29
6. Кинематика и динамика гармонических колебаний 29
7. Затухающие колебания 34
8. Вынужденные колебания 38
9. Основные характеристики волн 42
10. Уравнение волны. Энергия и интенсивность волны. Эффект Доплера 46
ТЕРМОДИНАМИКА 52
11. Первое начало термодинамики 52
12. Энтропия 57
ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ 62
СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ 66
1. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольних единиц и их наименования 66
2. Значения фундаментальных физических постоянных 66
3. Молярные массы некоторых молекул 67
Рекомендуемая литература 67