

**Интенсивность** волны численно равна энергии, переносимой волной за единицу времени сквозь единицу площади поверхности, нормальной к направлению распространения волны. *Интенсивность синусоидальной волны* пропорциональна квадрату её амплитуды.

### 51. Излучение электрического диполя

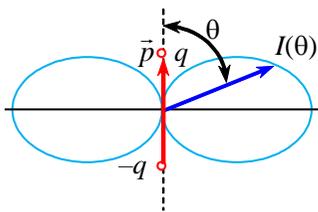
Процесс возбуждения электромагнитных волн какой-либо системой в окружающем пространстве называется **излучением** этих волн, а сама система называется **излучающей системой**. Поле электромагнитных волн называется **полем излучения**.

Простейшим излучателем электромагнитных волн является **электрический диполь** (см. 3–п.13), электрический момент которого изменяется по гармоническому закону

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t.$$

Примером подобного диполя может служить система, состоящая из покоящегося положительного заряда  $+q$  и отрицательного заряда  $-q$ , гармонически колеблющегося вдоль направления  $\vec{p}$  с частотой  $\omega$ .

Как показывает теория, в точках пространства, отстоящих от диполя на расстояниях  $r$ , значительно превышающих длину излучаемой волны  $r \gg \lambda$  (эта область пространства называется волновой зоной диполя), интенсивность излучения диполя:



$$I \sim \frac{\sin^2 \theta}{r^2},$$

где  $\theta$  – угол между осью диполя и направлением излучения. Зависимость  $I(\theta)$  при фиксированном  $r$  называют **полярной диаграммой направленности излучения диполя** (индикатриссой излучения). Из этой диаграммы видно,

что диполь сильнее всего излучает в направлениях, перпендикулярных его оси ( $\theta = \pi/2$ ). Вдоль своей оси ( $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ ) диполь не излучает вообще. Диаграмма направленности позволяет формировать излучение с определёнными пространственными характеристиками и используется при конструировании антенн.

### 52. Шкала электромагнитных волн



Электромагнитные волны, обладая широким диапазоном частот (или длин волн), отличаются по способам их генерации и регистрации, а также по своим

свойствам. Поэтому электромагнитные волны **условно** делятся на несколько видов: **радиоволны** ( $\lambda > 50$  мкм), **световые волны** (инфракрасное излучение ( $770 \text{ нм} < \lambda < 1 \text{ мм}$ ), **видимый свет** ( $380 \text{ нм} < \lambda < 770 \text{ нм}$ ), **ультрафиолетовое** излучение ( $10 \text{ нм} < \lambda < 380 \text{ нм}$ )), **рентгеновское излучение** ( $0,01 < \lambda < 100 \text{ нм}$ ) и  **$\gamma$ -излучение** ( $\lambda < 0,1 \text{ нм}$ ).

А.Н. Огурцов

## ФИЗИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ

Часть 5

### КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

OUTLINE of PHYSICS for STUDENTS



<https://sites.google.com/site/anogurtsov/lectures/phys/>

2016

## Свободные колебания

### 1. Колебания. Общий подход к изучению колебаний различной физической природы

**Колебаниями** называются движения или процессы, которые обладают определенной повторяемостью во времени.

Колебания сопровождаются попеременным превращением энергии одного вида в энергию другого вида.

Колебания называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счёт первоначально сообщённой энергии, без дальнейшего внешнего воздействия на колебательную систему (систему, совершающую колебания). Колебания называются **вынужденными**, если они происходят под действием периодически изменяющейся внешней силы.

**Физическая природа** колебаний может быть разной – различают механические, электромагнитные и др. колебания.

Но различные колебательные процессы описываются одинаковыми уравнениями, поэтому целесообразно изучать все колебательные процессы, используя общие свойства колебаний.

### 2. Гармонические колебания и их характеристики

**Гармоническими колебаниями** называются колебания, при которых колеблющаяся физическая величина изменяется по закону синуса (или косинуса).

Различные **периодические процессы** (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) могут быть представлены в виде суммы (суперпозиции) гармонических колебаний.

Гармоническое колебание величины  $s$  описывается уравнением типа

$$s = A \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

где:  $A$  – амплитуда колебания – максимальное значение колеблющейся величины;

$\omega$  – круговая (циклическая) частота;

$\varphi$  – начальная фаза колебания в момент времени  $t = 0$ ;

$(\omega t + \varphi)$  – фаза колебания в момент времени  $t$ .

Фаза колебания определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени. Так как косинус изменяется в пределах от +1 до –1, то  $s$  может принимать значения от  $+A$  до  $-A$ .

Поскольку  $\cos(a + 2\pi) = \cos a$ , то при гармонических колебаниях увеличение (приращение) фазы колебания на  $2\pi$  приводит к тому, что все величины, характеризующие колебание, принимают исходное значение.

**Периодом колебаний**  $T$  называется наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются состояния колеблющейся системы (совершается одно полное колебание) и фаза колебания получает приращение  $2\pi$

$$\omega(t + T) + \varphi = (\omega t + \varphi) + 2\pi.$$

Откуда следует

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

волн в зависимости от угла падения и значений показателей преломления приведены в таблице.

Сдвиг фаз между компонентами	$(\varphi + \psi) < \frac{\pi}{2}$		$(\varphi + \psi) > \frac{\pi}{2}$	
	$n_2 > n_1$ или $\varphi > \psi$	$n_2 < n_1$ или $\varphi < \psi$	$n_2 > n_1$ или $\varphi > \psi$	$n_2 < n_1$ или $\varphi < \psi$
$E_{i\parallel}$ и $E_{r\parallel}$	$\pi$	0	0	$\pi$
$E_{i\perp}$ и $E_{r\perp}$	$\pi$	0	$\pi$	0

Таким образом, при малых углах падения ( $\varphi + \psi < \pi/2$ ) фаза обеих компонент электрического вектора отражённой волны противоположна фазе падающей для случая, когда  $n_2 > n_1$ , и совпадает с фазой падающей волны при  $n_2 < n_1$ . В частности, это имеет место и при нормальном падении.

Явление изменения фазы волны на  $\pi$  при отражении от среды с большим показателем преломления – "потеря полуволны" – играет значительную роль в интерференционных и дифракционных явлениях, которые рассматриваются в курсе "Оптика".

Рассмотрим теперь случай, когда выполняется условие  $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$  (и,

следовательно,  $\text{tg}(\varphi + \psi) \rightarrow \infty$ ). Угол падения  $\varphi_B$ , при котором отражённый и преломлённый лучи взаимно перпендикулярны, называется **углом Брюстера**.

Из закона преломления следует, что:

$$\text{tg} \varphi_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

При этом  $r_{\parallel} = 0$  и в отражённой волне присутствует только  $E_{r\perp}$  компонента (отражённая волна линейно поляризована в плоскости, перпендикулярной плоскости падения).

### 50. Энергия электромагнитных волн

Объёмная плотность  $w$  энергии электромагнитной волны складывается из объёмных плотностей  $w_e$  и  $w_m$  электрического и магнитного полей:

$$w = w_e + w_m = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Так как  $\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$ , то  $w = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon \mu} E H$ .

Плотность потока энергии  $S = w \cdot v = E H$ .

**Вектор  $\vec{S}$  плотности потока энергии** электромагнитной волны называется **вектором Умова-Пойтинга**:

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}].$$

Вектор  $\vec{S}$  направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. Скалярная величина  $I$ , равная модулю среднего значения вектора Умова-Пойтинга, называется **интенсивностью** волны:  $I = \left\langle \vec{S} \right\rangle$ .

В этом случае для преломлённой волны имеем **закон преломления**:

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Разложим амплитуды электрического и магнитного векторов на компоненты  $\vec{E}_{\parallel}$ ,  $\vec{H}_{\parallel}$ ,  $\vec{E}_{\perp}$ ,  $\vec{H}_{\perp}$ , лежащие соответственно в плоскости падения и перпендикулярные к ней. Взаимные ориентации векторов  $\vec{s}$ ,  $\vec{E}_{\parallel}$ ,  $\vec{E}_{\perp}$ ,  $\vec{H}_{\parallel}$  и  $\vec{H}_{\perp}$  приведены на рисунках (а) и (б).

Для компонент напряжённости электрического вектора, лежащих в плоскости падения (рис. (а)), граничные условия (с учётом  $\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$ ,  $\varphi = \varphi'$  и  $n = \sqrt{\varepsilon}$ ) имеют вид:

$$E_{i\parallel} \cos \varphi + E_{r\parallel} \cos \varphi = E_{d\parallel} \cos \psi \quad \text{и} \quad n_1 E_{i\parallel} - n_1 E_{r\parallel} = n_2 E_{d\parallel}.$$

Решая эту систему уравнений и используя закон преломления, найдём выражения для **амплитудных коэффициентов отражения**  $r_{\parallel}$  и **пропускания**  $t_{\parallel}$  для волны, линейно-поляризованной в плоскости падения:

$$r_{\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} = -\frac{\sin 2\varphi - \sin 2\psi}{\sin 2\varphi + \sin 2\psi} = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)},$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_{d\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{2 \cos \varphi \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}. \quad (*)$$

Для компонент напряжённостей электрического вектора, перпендикулярных к плоскости падения (рис. (б)), граничные условия принимают вид:

$$E_{i\perp} + E_{r\perp} = E_{d\perp} \quad \text{и} \quad n_1 (E_{i\perp} - E_{r\perp}) \cos \varphi = n_2 E_{d\perp} \cos \psi.$$

**Амплитудные коэффициенты отражения и пропускания**  $r_{\perp}$  и  $t_{\perp}$ :

$$r_{\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)},$$

$$t_{\perp} = \frac{E_{d\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}. \quad (**)$$

Соотношения (\*) и (\*\*) между амплитудами падающей, отражённой и преломлённой волн называются **формулами Френеля**.

В формулах Френеля  $E_{i\parallel}$  и  $E_{i\perp}$  – величины положительные, а  $E_{d\parallel}$  и  $E_{d\perp}$  при любых возможных углах падения и преломления также положительны, что свидетельствует о совпадении фаз преломлённой и падающей волн. Величины  $E_{r\parallel}$  и  $E_{r\perp}$  могут быть как отрицательными, так и положительными. В первом случае фаза колебаний вектора  $\vec{E}$  изменяется при отражении на  $\pi$  (фаза колебаний вектора  $\vec{H}$  при этом сохраняется). Во втором случае (см. рис.) отражение происходит без изменения фазы колебаний вектора  $\vec{E}$  (соответственно фаза колебаний вектора  $\vec{H}$  при отражении изменяется на  $\pi$ ). Значения сдвига фаз колебаний вектора  $\vec{E}$  при отражении электромагнитных

**Частотой колебаний**  $n$  называется величина обратная периоду колебаний – число полных колебаний, совершаемых в единицу времени:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

**Единица частоты – герц (Гц)** – частота периодического процесса, при котором за 1 секунду совершается один цикл колебаний.

### 3. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Первая (скорость) и вторая (ускорение) производные по времени от гармонически колеблющейся величины  $s$  также совершают гармонические колебания с той же циклической частотой:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi).$$

Из последнего уравнения видно, что  $s$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{s} + \omega^2 s = 0.$$

Это уравнение называется **дифференциальным уравнением гармонических колебаний**. Его решение

$$s = A \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

### 4. Метод векторных диаграмм

Гармонические колебания изображаются графически **методом вращающегося вектора амплитуды** или **методом векторных диаграмм**.

Из произвольной точки  $O$ , выбранной на оси  $x$ , под углом  $\varphi$ , равным начальной фазе колебания, откладывается вектор  $\vec{A}$ , модуль которого равен амплитуде  $A$ , рассматриваемого колебания. Если этот вектор будет **вращаться** вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\omega$ , то проекция вектора на ось  $x$  будет совершать колебания по закону  $s = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ .

### 5. Экспоненциальная форма записи гармонических колебаний

Согласно формуле Эйлера для комплексных чисел:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

где  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица. Поэтому уравнение гармонического колебания  $s = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  можно записать в **комплексной экспоненциальной форме**

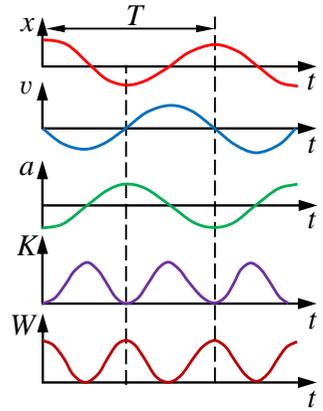
$$\tilde{s} = A e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Физический смысл имеет только **вещественная часть** комплексной функции  $\tilde{s}$ , которая и представляет собой гармоническое колебание:

$$\operatorname{Re}(\tilde{s}) = A \cos(\omega t + \varphi) = s.$$

**6. Механические гармонические колебания**

Пусть материальная точка совершает *прямолинейные* гармонические колебания вдоль оси  $x$  около положения равновесия, принятого за начало координат. Тогда для колеблющейся точки



**смещение:**  $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ ,  
**скорость:**  $v = \dot{x} = -A\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  
**ускорение:**  
 $a = \dot{v} = \ddot{x} = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi)$ .  
**Амплитуды** скорости и ускорения равны  $A\omega$  и  $A\omega^2$ .  
**Фаза** скорости отличается от фазы смещения на  $\frac{\pi}{2}$ , а фаза ускорения на  $\pi$ .

**Сила**, действующая на колеблющуюся материальную точку массой  $m$ , равна

$$F = ma = m \cdot A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi) = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -m\omega^2 x.$$

Таким образом, сила *пропорциональна смещению* материальной точки и *направлена* в сторону, противоположную смещению (*к положению равновесия*). Такая зависимость от смещения характерна для упругих сил и поэтому силы, которые аналогичным образом зависят от смещения, называются **квазиупругими**.

**7. Энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания**

**Кинетическая энергия** материальной точки

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{mA^2\omega^2}{4} [1 - \cos 2(\omega t + \varphi)].$$

**Потенциальная энергия** материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием квазиупругой силы:

$$W = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{mA^2\omega^2}{4} [1 + \cos 2(\omega t + \varphi)].$$

**Полная энергия** 
$$E = K + W = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$

остаётся постоянной, с течением времени происходит только превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно.

**8. Гармонический осциллятор**

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые дифференциальным уравнением:

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0.$$

Для нашего случая, граничные условия для электрического вектора:

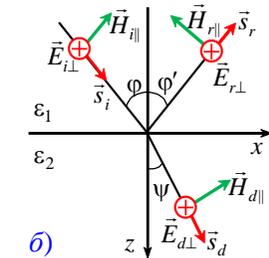
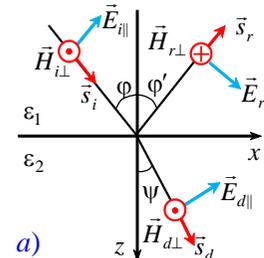
$$\vec{E}_{i\tau} \exp[i(\omega_i t - k_i \vec{s}_i \vec{r})] + \vec{E}_{r\tau} \exp[i(\omega_r t - k_r \vec{s}_r \vec{r})] = \vec{E}_{d\tau} \exp[i(\omega_d t - k_d \vec{s}_d \vec{r})].$$

Для выполнения этого равенства в любой момент времени  $t$  в любой точке границы раздела необходимо и достаточно, чтобы во всех трёх показателях экспонент были одинаковы коэффициенты при  $t$  и при проекции  $\vec{r}_\tau$  радиус-вектора  $\vec{r}$  на границу раздела, т. е. чтобы выполнялись равенства

$$\omega_i = \omega_r = \omega_d, \\ k_i \vec{s}_{i\tau} = k_r \vec{s}_{r\tau} = k_d \vec{s}_{d\tau}.$$

Следовательно, **частоты всех трёх волн** должны быть **равны между собой**, поскольку частоты колебаний зарядов в диэлектрической среде, вынуждаемых колебаниями электрического вектора, совпадают с частотой вынуждающей силы. Кроме того, единичные векторы  $\vec{s}_i, \vec{s}_r, \vec{s}_d$  находятся в одной плоскости, проходящей через нормаль к плоскости раздела (плоскость падения).

Выберем систему координат таким образом, чтобы плоскость  $xOy$  совпадала с плоскостью раздела сред, а плоскость  $zOx$  – с плоскостью



падаения, причём ось  $Oz$  направим из среды 1 в среду 2 (см. рисунок).

Обозначим  $\varphi$  – угол между  $\vec{s}_i$  и осью  $Oz$  (угол падения),  $\pi - \varphi'$  – угол между  $\vec{s}_r$  и  $Oz$  ( $\varphi'$  – угол отражения),  $\psi$  – угол между  $\vec{s}_r$  и  $Oz$  (угол преломления).

В этой системе координат **y**-компоненты векторов  $\vec{s}_\tau$  равны нулю, а **x**-компоненты можно выразить следующим образом:

$$s_{ix} = \sin \varphi, \quad s_{rx} = \sin \varphi', \quad s_{dx} = \sin \psi.$$

Следовательно, равенство  $k_i \vec{s}_{i\tau} = k_r \vec{s}_{r\tau} = k_d \vec{s}_{d\tau}$  примет вид:

$$\frac{\sin \varphi}{v_1} = \frac{\sin \varphi'}{v_1} = \frac{\sin \psi}{v_2}.$$

Первое равенство означает, что  $\varphi = \varphi'$  – **закон отражения** в оптике.

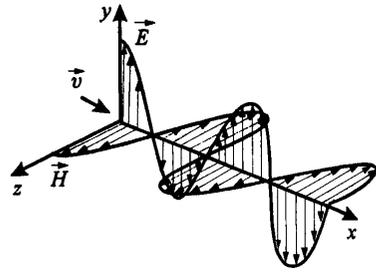
Из второго равенства следует оптический закон преломления.

**Показателем преломления среды  $n$**  называется величина, равная отношению скорости  $c$  электромагнитных волн в вакууме к их фазовой скорости  $v$  в среде:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon \mu}.$$

Для среды, не обладающей ферромагнитными свойствами,  $\mu \approx 1$  и практически можно считать, что

$$n = \sqrt{\epsilon}.$$



ной вектору  $\vec{v}$  скорости распространения волны, причём векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{v}$  образуют **правовинтовую** систему. (Только  $E_y \neq 0$  и  $H_z \neq 0$ ).

(2) В электромагнитной волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  **всегда колеблются в одинаковых фазах**, причём мгновенные значения  $E$  и  $H$  в любой точке связаны соотношением  $\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$ .

Волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

удовлетворяют плоские монохроматические электромагнитные волны, описываемые уравнениями  $E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$  и  $H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$ , где  $E_0$  и  $H_0$  – амплитуды напряжённостей электрического и магнитного полей волны;  $\omega$  – круговая частота волны,  $k = \omega/v$  – волновое число;  $\varphi$  – начальная фаза колебаний (одинаковая, поскольку колебания  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  происходят с одинаковой фазой).

**49. Отражение и преломление электромагнитных волн на границе раздела двух диэлектрических сред**

Пусть на границу раздела двух диэлектриков падает плоская электромагнитная волна. В таком случае, как показывает опыт, от границы раздела диэлектриков будут распространяться две плоские волны – отражённая и преломлённая.

Запишем выражения для падающей ( $i$ ), отражённой ( $r$ ) и преломлённой ( $d$ ) волн в комплексной экспоненциальной форме

$$\vec{E}_i \exp[i(\omega_i t - k_i \vec{r} \vec{s}_i)], \quad k_i = \frac{\omega_i}{v_i};$$

$$\vec{E}_r \exp[i(\omega_r t - k_r \vec{r} \vec{s}_r)], \quad k_r = \frac{\omega_r}{v_r};$$

$$\vec{E}_d \exp[i(\omega_d t - k_d \vec{r} \vec{s}_d)], \quad k_d = \frac{\omega_d}{v_d}.$$

Здесь  $\vec{r}$  – радиус-вектор;  $\omega$  и  $v$  – частота и скорости волн;  $\vec{E}$  – амплитуды волн;  $\vec{s}$  – единичные векторы, показывающие направление распространения соответствующих волн. Условие  $\vec{s} \vec{r} = \text{const}$  определяет плоскость, перпендикулярную к  $\vec{s}$ , поэтому данная система выражений описывает плоские волны, распространяющиеся вдоль векторов  $\vec{s}_i, \vec{s}_r, \vec{s}_d$ .

Граничные условия для тангенциальных ( $\tau$ ) компонент векторов напряжённости электрического и магнитного поля в любой точке границы раздела сред (1) и (2) имеют вид (см. 4–п.45):  $\vec{E}_{\tau 1} = \vec{E}_{\tau 2}$ ,  $\vec{H}_{\tau 1} = \vec{H}_{\tau 2}$ .

Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, математический и физический маятники и электрический колебательный контур.

**9. Пружинный маятник**

**Пружинный маятник** – это груз массой  $m$ , подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы:

$$F = -kx,$$

где  $k$  – жёсткость пружины.

Уравнение движения маятника:

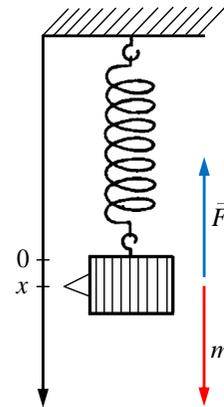
$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением движения гармонического осциллятора  $\ddot{s} + \omega^2 s = 0$ , мы видим, что пружинный маятник совершает колебания по закону  $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  с циклической частотой и периодом

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Потенциальная энергия пружинного маятника:

$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{kx^2}{2}.$$



Если на маятник действует сила трения, пропорциональная скорости  $F_{\text{тр}} = -r\dot{x}$ , где  $r$  – коэффициент сопротивления, то колебания маятника будут затухающими, и закон движения маятника будет иметь вид  $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$  или

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

**10. Математический маятник**

**Математическим маятником** называется идеализированная система, состоящая из материальной точки массой  $m$ , подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной  $l$ , и колеблющейся под действием силы тяжести без трения.

Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжёлый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити.

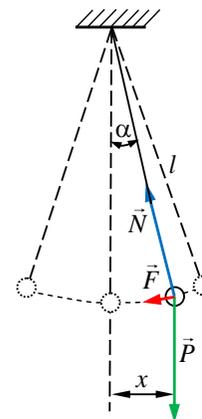
При малых углах отклонения  $\alpha$  можно считать  $x \approx l\alpha$ .

Возвращающая сила:

$$F = P \sin \alpha \approx mg \alpha = mg \frac{x}{l}.$$

Уравнение движения:

$$m\ddot{x} = -F = -mg \frac{x}{l} \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0.$$



Следовательно, движение математического маятника описывается дифференциальным уравнением гармонических колебаний, то есть происходит по закону  $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  с частотой и периодом, соответственно:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

### 11. Физический маятник

**Физическим маятником** называется твёрдое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс тела.

Если физический маятник отклонён из положения равновесия на некоторый угол  $\alpha$ , то момент возвращающей силы:

$$M = J\beta = J\ddot{\alpha}.$$

С другой стороны, при малых углах:

$$M = F_{\tau}l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl\alpha,$$

где  $J$  – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса  $O$ ;

$l$  – расстояние между точкой подвеса и центром масс  $C$  маятника;

$F_{\tau} = -mg \sin \alpha$  – возвращающая сила (со знаком минус, поскольку она всегда направлена противоположно направлению увеличения  $\alpha$ ).

Следовательно,  $J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0$ , или

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

Таким образом, при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания  $\alpha = \alpha_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  с циклической частотой и периодом:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

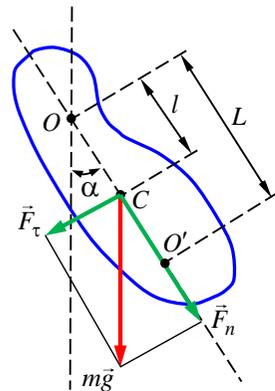
где длина  $L = \frac{J}{ml}$  – называется приведённой длиной физического маятника.

**Приведённая длина физического маятника** – это длина такого математического маятника, который имеет такой же период колебаний, что и данный физический маятник.

Точка  $O'$  на продолжении прямой  $OC$ , отстоящая от оси подвеса на расстоянии приведённой длины  $L$ , называется **центром качаний** физического маятника.

Математический маятник можно представить как *частный (предельный) случай физического маятника*, вся масса которого сосредоточена в его центре масс. При этом  $J = ml^2$ , следовательно:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Верхний знак берётся, если при движении источника или приёмника происходит их сближение, нижний знак – в случае их взаимного удаления.

Если направления скоростей не совпадают с проходящей через источник и приёмник прямой, то вместо этих скоростей в формуле надо брать их проекцию на направление этой прямой.

## Электромагнитные волны

### 47. Электромагнитные волны

**Электромагнитные волны** – это переменное электромагнитное поле, распространяющееся в пространстве с конечной скоростью.

**Существование электромагнитных волн вытекает из уравнений**

**Максвелла:**  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \text{div } \vec{D} = \rho; \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \text{div } \vec{B} = 0,$

которые в области пространства, не содержащей свободных электрических зарядов и макроскопических токов, имеют вид:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \text{div } \vec{D} = 0; \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \text{div } \vec{B} = 0.$$

Если среда – однородный и изотропный диэлектрик, не обладающий сегнетоэлектрическими или ферромагнитными свойствами, то  $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$  и  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ , где  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные,  $\epsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

В этом случае уравнения Максвелла имеют вид:

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \text{div } \vec{H} = 0; \text{rot } \vec{H} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \text{div } \vec{E} = 0.$$

Используя соотношение  $\Delta \vec{V} = \text{grad div } \vec{V} - \text{rot rot } \vec{V}$ , получим **волновые уравнения** для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\Delta \vec{E} = \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{H} = \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа;  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  – **фазо-**

**вая скорость** электромагнитной волны;  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$  – скорость света в вакууме.

Таким образом, **электромагнитные поля действительно могут существовать в виде электромагнитных волн.**

Поскольку  $\epsilon\mu > 1$ , то  $v < c$  – **скорость распространения электромагнитных волн в веществе всегда меньше, чем в вакууме.**

### 48. Поперечность электромагнитных волн

**Следствия теории Максвелла:**

**(1)** Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  напряжённостей электрического и магнитного полей волн **взаимно перпендикулярны** и **лежат в плоскости**, перпендикуляр-

Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отражённой волн.

Если среда, от которой происходит отражение, *менее плотная*, то на границе сред образуется *пучность*.

Если среда, от которой происходит отражение, *более плотная*, то на границе сред образуется *узел* стоячей волны.

**46. Эффект Доплера**

**Эффектом Доплера** называется изменение частоты колебаний, воспринимаемой приёмником, при движении источника этих колебаний и приёмника друг относительно друга. В акустике эффект Доплера проявляется как повышение тона при приближении источника звука к приёмнику и понижения тона звука при удалении источника от приёмника.

Пусть источник и приёмник звука движутся вдоль соединяющей их прямой;  $v_i$  и  $v_p$  – скорости источника и приёмника (положительны при сближении и отрицательны при удалении источника и приёмника);  $n_0$  – частота колебаний источника;  $v$  – скорость распространения звука в данной среде.

**1) Источник и приёмник покоятся относительно среды.**

$v_i = v_p = 0$ . Длина волны  $\lambda = vT = v/n_0$ . Распространяясь в среде, волна достигнет приёмника и вызовет его колебания с частотой:  $n = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{vT} = n_0$ .

**2) Приёмник приближается к источнику, а источник покоится.**

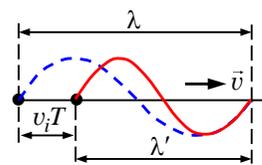
$v_p > 0, v_i = 0$ . Скорость распространения волны относительно приёмника станет равной  $v + v_p$ , при этом длина волны не меняется, следовательно,

$$n = \frac{v + v_p}{\lambda} = \frac{v + v_p}{vT} = \frac{v + v_p}{v} n_0.$$

Частота колебаний, воспринимаемых приёмником, увеличится.

**3) Источник приближается к приёмнику, а приёмник покоится.**

$v_p = 0, v_i > 0$ . Скорость распространения колебаний  $v$  зависит только от свойств среды, поэтому за время, равное периоду колебаний источника, излучённая им волна пройдёт в направлении к приёмнику расстояние  $vT = \lambda$ . Источник же пройдёт расстояние  $v_i T$ . Поэтому к моменту окончания излучения волны длина волны в направлении движения сократится и станет  $\lambda' = \lambda - v_i T$ . Частота колебаний которые воспринимает приёмник, увеличится:



$$n = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(\lambda - v_i T)} = \frac{v}{v - v_i} n_0.$$

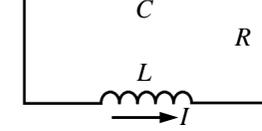
**4) Источник и приёмник движутся друг относительно друга.**

Этот случай обобщает два предыдущих. Частота колебаний, воспринимаемых приёмником:

$$n = \frac{v \pm v_p}{v \mp v_i} n_0.$$

**12. Электрический колебательный контур**

**Электрическим колебательным контуром** называется электрическая цепь, состоящая из включённых последовательно катушки индуктивностью  $L$ , конденсатора ёмкостью  $C$  и резистора сопротивлением  $R$ .



По закону Ома для участка цепи:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \Theta_c \quad \text{или} \quad IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt},$$

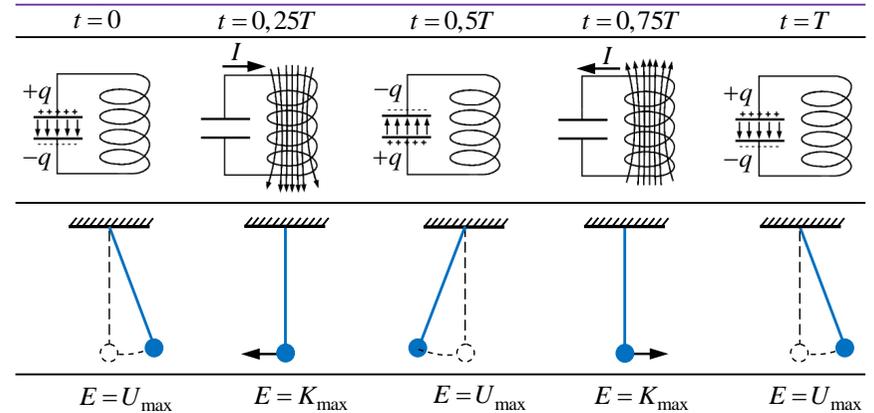
где  $q$  и  $(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{q}{C}$  – заряд конденсатора и

разность потенциалов его обкладок в произвольный момент времени  $t$ ;  $R$  – электрическое сопротивление колебательного контура;  $\Theta_c$  – ЭДС самоиндукции в катушке. Сила тока  $I = \frac{dq}{dt}$ , поэтому **дифференциальное уравнение колебаний заряда** в колебательном контуре

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

**13. Стадии колебаний в идеализированном колебательном контуре**

**Идеализированный колебательный контур** – это колебательный контур, у которого  $R = 0$ .



Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  конденсатор заряжен зарядом  $q$ . Тогда энергия электрического поля между обкладками конденсатора  $W_e = \frac{q^2}{2C}$ . При замыкании конденсатора на катушку индуктивности, в контуре потечёт возрастающий ток  $I$ . Энергия электрического поля начнёт

**уменьшаться**, а энергия магнитного поля катушки  $W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\dot{q}^2}{2}$  будет **возрастать**. Поскольку потерь в контуре нет ( $R = 0$ ), то полная энергия

$W = W_e + W_m$  сохраняется.

**В момент времени**  $t = \frac{1}{4}T$  ( $T$  – период колебаний), когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля обращается в нуль, а энергия магнитного поля (а, следовательно, и ток) достигает наибольшего значения.

Стадии колебаний в контуре можно сопоставить с аналогичными стадиями механических колебаний, например, математического маятника, который в момент времени  $t = 0$  смещён из положения равновесия и имеет максимальную потенциальную энергию  $E = U_{\max}$ . В момент времени  $t = \frac{1}{4}T$  смещение маятника равно нулю, скорость – максимальна, и потенциальная энергия полностью переходит в кинетическую энергию маятника  $E = K_{\max}$ .

**Начиная с момента времени**  $t = \frac{1}{4}T$ , ток в контуре будет убывать, следовательно, магнитное поле катушки начнёт ослабевать. Изменение магнитного поля вызовет индукционный ток, который, по правилу Ленца, будет иметь то же направление, что и ток разрядки конденсатора. Конденсатор начинает перезарядаться и **к моменту времени**  $t = \frac{1}{2}T$  заряд на обкладках конденсатора достигнет максимума, ток в цепи прекратится, и энергия контура снова будет равна энергии электрического поля в конденсаторе.

Для маятника это будет соответствовать максимальному смещению в направлении, противоположном первоначальному, остановке маятника в крайнем положении ( $v = 0$ ) и обратному превращению кинетической энергии в потенциальную.

Далее, все процессы в колебательном контуре будут протекать в обратном направлении и система **к моменту времени**  $t = T$  придёт в первоначальное состояние.

Таким образом, в колебательном контуре происходят периодические изменения заряда  $q$  на обкладках конденсатора и силы тока  $I$ . Эти электрические колебания сопровождаются превращением энергий электрического и магнитного полей.

Из сравнения электрических колебаний с механическими колебаниями следует, что:

- энергия электрического поля конденсатора *аналогична* потенциальной энергии маятника;
- энергия магнитного поля катушки *аналогична* кинетической энергии маятника;
- сила тока в контуре *аналогична* скорости движения маятника;
- индуктивность  $L$  *выполняет функцию* массы;
- сопротивление  $R$  *играет роль* силы трения, действующей на маятник.

**14. Свободные гармонические колебания в колебательном контуре**

Свободные электрические колебания в колебательном контуре являются гармоническими, если его электрическое сопротивление  $R = 0$ .

Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Сложив эти уравнения, с учётом  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$  и  $k = 2\pi/\lambda$ , получим **уравнение стоячей волны**:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cos \omega t = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t.$$

В точках среды, где

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

амплитуда стоячей волны достигает максимального значения  $A_{CT} = 2A$ .

Такие точки называются **пучностями стоячей волны**.

Координаты пучностей

$$x_{II} = \pm m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, \dots).$$

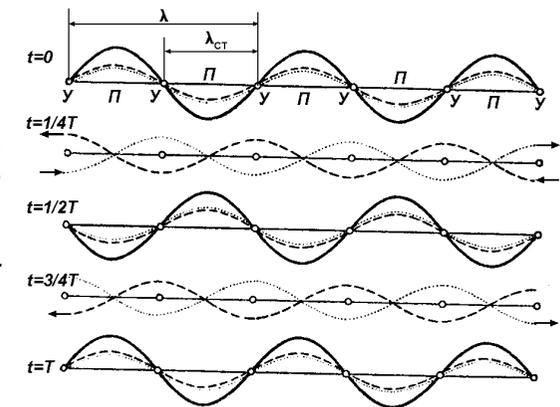
В точках среды, где

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

амплитуда стоячей обращается в нуль  $A_{CT} = 0$ . Такие точки называются **узлами стоячей волны**.

Координаты узлов: 
$$x_U = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Расстояния между двумя соседними узлами и между двумя соседними пучностями одинаковы и равны половине длины волны  $\lambda$  бегущих волн. Эту величину называют **длиной стоячей волны**:  $\lambda_{CT} = \frac{\lambda}{2}$ .



В бегущей волне	В стоячей волне
<b>Амплитуда колебаний</b>	
все точки волны совершают колебания с <b>одинаковой</b> амплитудой	все точки между двумя узлами колеблются с <b>разными</b> амплитудами
<b>Фаза колебаний</b>	
фаза колебаний <b>зависит от координаты</b> $x$ рассматриваемой точки	все точки между двумя узлами колеблются с <b>одинаковыми</b> фазами
	при переходе через узел фаза колебаний изменяется на $\pi$ ; точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в <b>противофазе</b>
<b>Перенос энергии</b>	
<b>энергия колебательного движения переносится</b> в направлении распространения бегущей волны	<b>переноса энергии нет</b> , лишь в пределах $\frac{\lambda}{2}$ происходят взаимные превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно

#### 44. Интерференция волн

**Когерентностью** называется согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов (стр. 6-7).

Две волны называются **когерентными**, если разность их фаз не зависит от времени.

Гармонические волны, имеющие одинаковую частоту, когерентны всегда.

**Интерференцией** волн называется явление наложения волн, при котором происходит устойчивое во времени их взаимное усиление в одних точках пространства и ослабление в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн.

Рассмотрим наложение двух когерентных сферических волн, возбуждаемых точечными источниками, колеблющимися с одинаковыми амплитудой  $A_0$ , частотой  $\omega$  и постоянной разностью фаз:

$$\xi_1 = \frac{A_0}{r_1} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1), \quad \xi_2 = \frac{A_0}{r_2} \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2),$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния от источников до рассматриваемой точки,  $k$  – волновое число,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – начальные фазы волн.

Амплитуда результирующей волны:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\varphi) = A_0^2 \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1r_2} \cos[k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)] \right\}.$$

Поскольку для когерентных источников  $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$ , то результат интерференции двух волн зависит от величины  $(r_1 - r_2)$ , называемой **разностью хода**.

**Интерференционный максимум**  $\left( A = \frac{A_0}{r_1} + \frac{A_0}{r_2} \right)$  наблюдается в точках,

где:  $k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$ .

Числа  $(m = 0, 1, 2, \dots)$  называются **порядком интерференционного максимума**.

**Интерференционный минимум**  $\left( A = \left| \frac{A_0}{r_1} - \frac{A_0}{r_2} \right| \right)$  наблюдается в точках,

где:  $k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm(2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$ .

Числа  $(m = 0, 1, 2, \dots)$  называются **порядком интерференционного минимума**.

#### 45. Стоячие волны

Особым случаем интерференции являются стоячие волны.

**Стоячие волны** – это волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами.

Пусть две плоские бегущие волны с одинаковыми амплитудами и частотами распространяются навстречу друг другу вдоль оси  $x$ :

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx), \quad \xi_2 = A \cos(\omega t + kx).$$

Заряд  $q$  совершает гармонические колебания по закону

$$q = q_{\max} \cos(\omega t + \varphi),$$

с циклической частотой

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

Эта формула называется – **формула Томсона**.

Здесь  $q_{\max}$  – это амплитуда колебаний заряда.

Сила тока в колебательном контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_{\max} \sin(\omega t + \varphi) = I_{\max} \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

опережает по фазе колебания заряда  $q$  на  $\pi/2$ .

Здесь  $I_{\max} = \omega q_{\max} = \frac{q_{\max}}{\sqrt{LC}}$  – амплитуда силы тока.

Разность потенциалов обкладок конденсатора  $U = \varphi_2 - \varphi_1$  также изменяется по гармоническому закону и совпадает по фазе с зарядом  $q$ :

$$U = \frac{q}{C} = U_{\max} \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $U_{\max} = \frac{q_{\max}}{C}$  – амплитуда разности потенциалов. Амплитуда тока:

$$I_{\max} = U_{\max} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Величина  $\sqrt{L/C}$  называется **волновым сопротивлением** колебательного контура.

#### 15. Сложение гармонических колебаний

Если система одновременно участвует в нескольких колебательных процессах, то под сложением колебаний понимают нахождение закона, описывающего результирующий колебательный процесс.

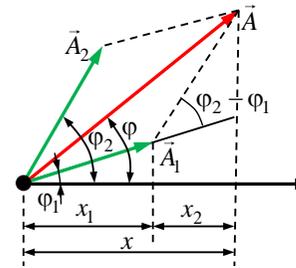
Для сложения колебаний  $x_1$  и  $x_2$ :

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

используем **метод вращающегося вектора амплитуды (метод векторных диаграмм)**.

Так как векторы  $A_1$  и  $A_2$  вращаются с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ , то разность фаз  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  между ними остаётся постоянной. Уравнение результирующего колебания будет

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi),$$



где амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi$  задаются соотношениями

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

**Сумма двух гармонических** колебаний одного направления и одинаковой частоты **есть гармоническое колебание** в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз складываемых колебаний:

$$1) \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi, \text{ где } (m = 0, 1, 2, \dots), \text{ тогда } A = A_1 + A_2;$$

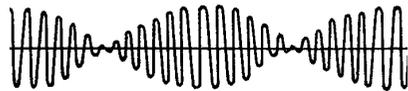
$$2) \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m + 1)\pi, \text{ где } (m = 0, 1, 2, \dots), \text{ тогда } A = |A_1 - A_2|.$$

## 16. Биения

**Биениями** называются периодические изменения **амплитуды** колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с **близкими частотами**.

Пусть амплитуды складываемых колебаний **равны**  $A$ , а частоты равны  $\omega$  и  $\omega + \Delta\omega$ , причём  $\Delta\omega \ll \omega$ . Пусть для простоты начало отсчёта выбрано так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю:

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t.$$



Результирующее колебание будет иметь вид:

$$x = \left( 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cdot \cos \omega t$$

– гармоническое колебание с частотой  $\omega$ , амплитуда которого изменяется по закону  $A_{\text{биений}} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$  с частотой  $\omega_{\text{биений}} = \Delta\omega$  (частота биений вдвое больше частоты изменения косинуса, поскольку  $A_{\text{биений}}$  берётся по модулю).

## 17. Разложение Фурье

Любое сложное периодическое колебание  $s = f(t)$  можно представить в виде суммы простых гармонических колебаний с циклическими частотами, кратными основной циклической частоте  $\omega_0$ :

$$s = f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^n A_m \cos(m\omega_0 t + \varphi_m).$$

Такое представление периодической функции  $f(t)$  называется **разложением её в ряд Фурье** или **гармоническим анализом сложного периодического колебания**.

Члены ряда Фурье, соответствующие гармоническим колебаниям с циклическими частотами  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0$  и т. д., называются **первой** (или **основной**), **второй**, **третьей** и т. д., **гармониками** сложного периодического колебания  $s = f(t)$ .

Совокупность этих гармоник образует **спектр колебания**  $s = f(t)$ .

## 41. Волновое уравнение

Распространение волн в **однородной изотропной** среде в общем случае описывается **волновым уравнением** – дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

где  $v$  – фазовая скорость;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ – оператор Лапласа.}$$

**Решением** волнового уравнения является уравнение любой волны (в том числе и плоская, и сферическая волны).

**Волновое уравнение для плоской волны**, распространяющейся вдоль оси  $x$ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

## 42. Принцип суперпозиции

Если среда, в которой распространяется одновременно несколько волн, **линейна**, то к этим волнам применим **принцип суперпозиций (наложения) волн**.

При распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвующие в каждом из слагающих волновых процессов.

## 43. Групповая скорость

Любое сложное колебание может быть представлено в виде **суммы** одновременно совершающихся гармонических колебаний (разложение Фурье).

Поэтому любая волна может быть представлена в виде суммы гармонических волн, то есть в виде волнового пакета или группы волн.

**Волновым пакетом** называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства.

За скорость распространения волнового пакета принимают скорость перемещения максимума его амплитуды (центра волнового пакета).

**Групповой скоростью**  $u$  называется скорость движения группы волн, образующих в каждый момент времени локализованный в пространстве волновой пакет (или скорость движения центра волнового пакета).

Групповая скорость определяется как производная

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Связь групповой и фазовой скоростей:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

Следовательно, **функция**  $\xi(x, t)$  является не только *периодической функцией времени*, но и *периодической функцией координаты*  $x$ .

В общем случае **уравнение плоской волны**, распространяющейся вдоль положительного направления оси  $x$  в среде, не поглощающей энергию, имеет вид:

$$\xi(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right],$$

здесь:  $A = \text{const}$  – **амплитуда волны**;

$\omega$  – циклическая частота;

$\varphi_0$  – **начальная фаза волны**;

$\omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0$  – **фаза плоской волны**.

Если определить **волновое число**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v},$$

то уравнение плоской бегущей волны можно записать в виде:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

или в экспоненциальной форме:

$$\xi(x, t) = A e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)},$$

где физический смысл имеет только вещественная часть.

В общем виде уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении  $\vec{s}$ , имеет вид:

$$\xi(\vec{r}, t) = A \exp[i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \varphi_0)].$$

### 39. Фазовая скорость

Скорость  $v = \frac{dx}{dt}$  в этих уравнениях есть **скорость распространения**

**фазы волны**, и её называют **фазовой скоростью**.

Действительно, пусть в волновом процессе фаза постоянна

$$\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const},$$

следовательно,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v.$$

### 40. Уравнение сферической волны

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0),$$

где  $r$  – расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды.

Амплитуда колебаний в сферической волне убывает с расстоянием по закону  $\frac{1}{r}$ .

### 18. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинаковой частоты

Пусть два гармонических колебания одинаковой частоты  $\omega$ , происходят во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей  $x$  и  $y$ . Для простоты выберем начало отсчёта так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos(\omega t + \alpha),$$

где  $\alpha$  – разность фаз колебаний, а  $A$  и  $B$  – их амплитуды. Уравнение траектории результирующего колебания (исключая  $t$  из уравнений) есть **уравнение эллипса**, произвольно расположенного относительно координатных осей:

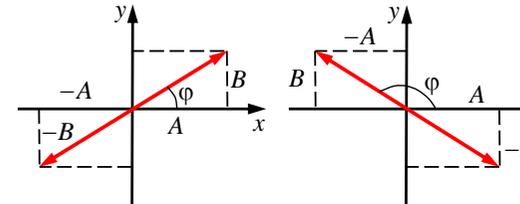
$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha,$$

и такие колебания называются **эллиптически поляризованными**.

### 19. Линейно поляризованные колебания

$$m = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$$

$$m = \pm 1, \pm 3, \dots$$



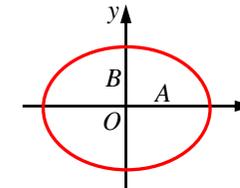
Если разность фаз равна  $\alpha = m\pi$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то эллипс вырождается в отрезок **прямой**

$$y = \pm \frac{B}{A} x,$$

где знак плюс соответствует нулю и чётным значениям  $m$ , а знак минус – нечётным значениям  $m$ .

Результирующее колебание является гармоническим колебанием с частотой  $\omega$  и амплитудой  $\sqrt{A^2 + B^2}$  и совершается вдоль прямой, составляющей с осью  $x$  угол  $\varphi = \arctg(\frac{B}{A} \cos m\pi)$ . Такие колебания называются **линейно поляризованными колебаниями**.

### 20. Циркулярно поляризованные колебания



Если разность фаз  $\alpha = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$ , где ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то уравнение траектории:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам  $A$  и  $B$ .

**Если**  $A = B$ , то эллипс вырождается в окружность, и такие колебания называются **циркулярно поляризованными** или **колебаниями, поляризованными по кругу**.

### 21. Фигуры Лиссажу

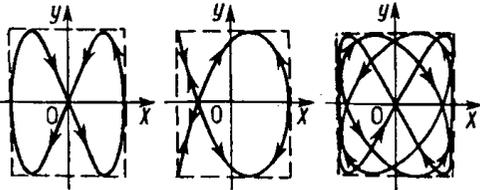
Если взаимно перпендикулярные колебания происходят с циклическими частотами  $p\omega$  и  $q\omega$ , где  $q$  и  $p$  – **целые** числа:

$$x = A \cos(p\omega t), \quad y = B \cos(q\omega t + \alpha),$$

то значения координат  $x$  и  $y$  *одновременно повторяются* через одинаковые промежутки времени  $T_0$  равные наименьшему общему кратному периодов

$$T_1 = \frac{2\pi}{p\omega} \text{ и } T_2 = \frac{2\pi}{q\omega} \text{ колебаний вдоль осей } x \text{ и } y. \text{ Траектории замкнутых кри-}$$

вых, которые получаются в этих случаях, называются **фигурами Лиссажу**. Вид этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. На рисунке показан вид фигур Лиссажу при трёх различных значениях отношения  $\frac{p}{q}$  (2:1, 3:2, 4:3) и разности фаз  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .



$$\text{ти фаз } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

## Затухающие и вынужденные колебания

### 22. Затухающие колебания

**Затуханием колебаний** называется постепенное ослабление колебаний с течением времени, обусловленное потерей энергии колебательной системой.

Затухание механических колебаний вызывается главным образом трением. Затухание в электрических колебательных системах вызывается тепловыми потерями и потерями на излучение электромагнитных волн, а также тепловыми потерями в диэлектриках и ферромагнетиках вследствие электрического и магнитного гистерезиса.

Закон затухания колебаний определяется свойствами колебательных систем.

**Система называется линейной**, если параметры, характеризующие те физические свойства системы, которые существенны для рассматриваемого процесса, *не изменяются* в ходе процесса.

**Линейные системы** описываются **линейными** дифференциальными уравнениями.

**Различные** по своей природе **линейные** системы описываются **одинаковыми уравнениями**, что позволяет осуществлять **единый подход** к изучению колебаний различной физической природы.

### 23. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы

**Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний** линейной системы имеет вид:

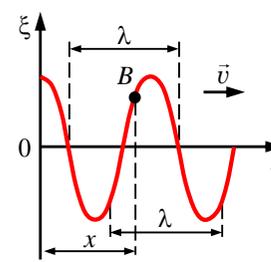
$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0,$$

где  $s$  – колеблющаяся величина;

$\delta = \text{const}$  – **коэффициент затухания**;

$\omega_0$  – циклическая частота свободных **незатухающих** колебаний той же колебательной системы (при  $\delta = 0$ ).

Отличие **графика волны** от **графика гармонического колебания**:



1) график волны представляет зависимость смещения всех частиц среды от **расстояния** до источника колебаний в **данный момент времени**  $\xi = \xi(x, t = \text{const})$ ;

2) график гармонического колебания это зависимость смещения **данной частицы** от **времени**  $\xi = \xi(x = \text{const}, t)$ .

**Длиной волны  $\lambda$**  называется расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе.

Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется гармоническая волна за время, равное периоду колебаний  $T$ :

$$\lambda = vT \text{ или } v = \lambda n,$$

где  $n$  – частота колебаний,  $v$  – скорость распространения волны.

**Волновым фронтом** называется геометрическое место точек, до которых доходят колебания к определённому моменту времени  $t$ .

**Волновой поверхностью** называется геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

Волновых поверхностей можно провести бесчисленное множество, а волновой фронт в каждый момент времени – один.

### 37. Бегущие волны

**Бегущими волнами** называются волны, которые переносят в пространстве энергию.

Перенос энергии количественно характеризуется **вектором плотности потока энергии** (**вектор Умова**). Направление этого вектора совпадает с направлением распространения энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно волне.

Важными **примерами** бегущих волн являются плоская и сферическая волны.

**Волна** называется **плоской**, если её волновые поверхности представляют совокупность плоскостей, параллельных друг другу.

**Волна** называется **сферической**, если её волновые поверхности имеют вид концентрических сфер. Центры этих сфер называются **центром волны**.

### 38. Уравнение плоской волны

Пусть точки, которые расположены в плоскости  $x = 0$ , колеблются по закону  $\xi(0, t) = A \cos \omega t$ . И пусть  $v$  – скорость распространения колебаний в данной среде.

Колебания частицы  $B$  среды (см. рисунок), расположенной на расстоянии  $x$  от источника колебаний  $O$ , будут происходить по тому же закону. Но поскольку для прохождения волной расстояния  $x$  требуется время  $\tau = x/v$ , то её колебания будут отставать по времени от колебания источника на  $\tau$ .

Уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости  $x$ , имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right).$$

Если в цепи отсутствует реактивное сопротивление ( $X = 0$ ), то  $\cos \varphi = 1$  и  $P = IU$ .

Если цепь содержит только реактивное сопротивление ( $R = 0$ ), то  $\cos \varphi = 0$  и  $P = 0$ , какими бы большими ни были ток и напряжение.

## Волны в упругой среде

### 34. Волновой процесс

Если возбудить колебания в какой-либо точке среды (твёрдой, жидкой или газообразной) то, вследствие взаимодействия между частицами среды, эти колебания будут передаваться от одной точки среды к другой со скоростью, зависящей от свойств среды.

При рассмотрении колебаний *не учитывается* детальное строение среды; среда рассматривается как **сплошная**, непрерывно распределённая в пространстве и обладающая упругими свойствами.

Среда называется **линейной**, если её свойства не изменяются под действием возмущений, создаваемых колебаниями.

**Волновым процессом** или **волной** называется процесс распространения колебаний в сплошной среде.

При распространении волны, частицы колеблются около своих положений равновесия, а не перемещаются вслед за волной.

Вместе с волной от частицы к частице передаётся только состояние колебательного движения и его энергия.

**Основным свойством** всех волн **является перенос энергии без переноса вещества**.

### 35. Упругие волны

**Упругими (или механическими) волнами** называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде.

**Продольная волна** – это волна, в которой частицы среды колеблются в направлении распространения волны.

**Поперечная волна** – это волна, в которой частицы среды колеблются в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

**Продольные упругие волны** могут распространяться в средах, в которых возникают упругие силы при деформации *сжатия и растяжения* (в твёрдых, жидких и газообразных телах).

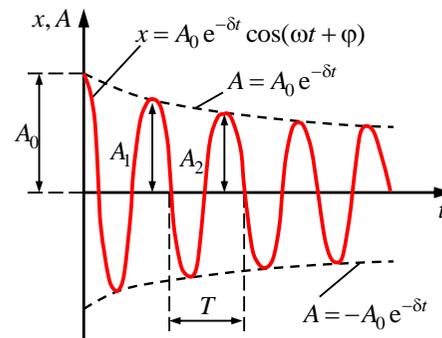
**Поперечные упругие волны** могут распространяться только в среде, в которой возникают упругие силы при деформации *сдвига* (только в твёрдых телах).

### 36. Упругая гармоническая волна

**Упругая волна** называется **гармонической**, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими.

Пусть гармоническая волна распространяется со скоростью  $v$  вдоль оси  $OX$ . Обозначим смещения частиц среды через  $\xi = \xi(x, t)$ .

Для данного момента времени  $t$  зависимость между смещением частиц среды и расстоянием  $x$  этих частиц от источника колебаний  $O$  можно представить в виде **графики волны**.



В случае малых затуханий ( $\delta^2 \ll \omega_0^2$ ) решение этого уравнения:

$$s = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где:

$A = A_0 e^{-\delta t}$  – амплитуда затухающих колебаний;

$A_0$  – начальная амплитуда;

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  – циклическая частота затухающих колебаний.

Промежуток времени  $\tau = \frac{1}{\delta}$ , в течение которого амплитуда затухающих

колебаний уменьшается в  $e$  раз, называется **временем релаксации**.

Затухание *нарушает* периодичность колебаний.

Затухающие колебания *не являются* периодическими.

Однако если затухание мало, то можно *условно* пользоваться понятием **периода затухающих колебаний** как промежутка времени между двумя последующими максимумами колеблющейся физической величины:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

### 24. Декремент затухания

Если  $A(t)$  и  $A(t+T)$  – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающихся на период, то отношение

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$$

называется **декрементом затухания**, а его логарифм

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$$

называется **логарифмическим декрементом затухания**.

Здесь  $N$  – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в  $e$  раз.

### 25. Добротность колебательной системы

**Добротностью колебательной системы** называется безразмерная величина  $Q$ , равная произведению  $2\pi$  на отношение энергии  $W(t)$  колебаний системы в произвольный момент времени  $t$  к убыли этой энергии за промежуток времени от  $t$  до  $t+T$  (за один условный период затухающих колебаний):

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}.$$

Энергия  $W(t)$  пропорциональна квадрату амплитуды  $A(t)$ , поэтому

$$Q = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\theta}}$$

При малых значениях логарифмического декремента затухания ( $\theta \ll 1$ )

$$1 - e^{-2\theta} \approx 2\theta, \text{ поэтому (принимая } T \approx T_0): \quad Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N = \frac{\pi}{\delta \cdot T} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

**26. Примеры свободных затухающих колебаний**

Рассмотрим затухающие колебания *различной* физической природы:

- 1) **механические колебания** – пружинный маятник с массой  $m$ , который совершает малые колебания под действием упругой силы  $F = -kx$  и силы трения  $F_{тр} = -r\dot{x}$  ( $r$  – коэффициент сопротивления);
- 2) **электромагнитные колебания** – колебания в колебательном контуре состоящем из сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и ёмкости  $C$ .

Будем сравнивать оба случая с дифференциальным уравнением свободных затухающих колебаний линейной системы

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = 0,$$

решение которого имеет вид

$$s = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

	1) пружинный маятник	2) колебательный контур
колеблющаяся величина	смещение относительно положения равновесия $x$	заряд $q$
дифференциальное уравнение колебаний	$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$	$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$
частота незатухающих колебаний $\omega_0$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
коэффициент затухания $\delta$	$\delta = \frac{r}{2m}$	$\delta = \frac{R}{2L}$
частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$	$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$
добротность $Q$	$Q = \frac{\sqrt{km}}{r}$	$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
закон колебаний	$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$	$q = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$

**27. Вынужденные колебания**

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо *компенсировать потери энергии*. Такая компенсация возможна с помощью какого-либо периодически действующего фактора  $X(t)$ , изменяющегося по гармоническому закону

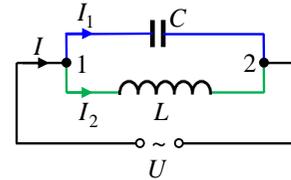
$$X(t) = X_0 \cos \omega t.$$

**31. Резонанс токов**

К цепи переменного тока, содержащей параллельно включённые конденсатор ёмкостью  $C$  и катушку индуктивностью  $L$ , приложено напряжение  $U = U_m \cos \omega t$ .

Токи в ветвях  $1C2$  ( $R=0, L=0$ ) и  $1L2$  ( $R=0, C=\infty$ ) равны

$$I_{m1} = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}}, \quad I_{m2} = \frac{U_m}{\omega L}$$



и противоположны по фазам. Амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи:

$$I_m = |I_{m1} - I_{m2}| = U_m \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right|.$$

Если  $\omega = \omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то  $I_{m1} = I_{m2}$  и  $I_m = 0$ . Явление резкого

уменьшения амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей параллельно включённые конденсатор и катушку индуктивности, при приближении частоты  $\omega$  приложенного напряжения к резонансной частоте  $\omega_{рез}$  называется **резонансом токов (параллельным резонансом)**.

В реальных цепях  $R \neq 0$ , поэтому сила тока  $I_m > 0$ , но принимает наименьшее возможное значение.

**32. Действующее значение переменного тока**

**Действующим** или **эффективным значением переменного тока**  $I = I_0 \cos \omega t$  называется среднее квадратичное значение силы тока за период

$$T \text{ его изменения: } I_{эф} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad \text{поскольку } \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, **действующее значение напряжения:**  $U_{эф} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ .

**33. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока**

**Мгновенная мощность тока в цепи:**

$$P(t) = U(t)I(t) = U_m \cos \omega t \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Среднее за период значение мгновенной мощности называется **активной мощностью P тока:**

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \cos \omega t \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi) dt = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi = I_{эф} U_{эф} \cos \varphi.$$

Множитель  $\cos \varphi$  называется **коэффициентом мощности**.

Так как  $I_{эф} = \frac{U_{эф}}{Z}$ , и  $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$ , то  $P = \frac{R U_{эф}^2}{Z^2} = R I_{эф}^2$ .

Величина

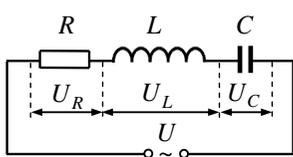
$$R_C = \frac{1}{\omega C}$$

называется **реактивным ёмкостным сопротивлением**. Для постоянного тока ( $\omega = 0$ )  $R_C = \infty$ , т. е. постоянный ток через конденсатор течь не может.

(4) В общем случае  $R \neq 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $L \neq 0$ . Если напряжение в цепи изменяется по закону  $U = U_m \cos \omega t$ , то в цепи течёт ток

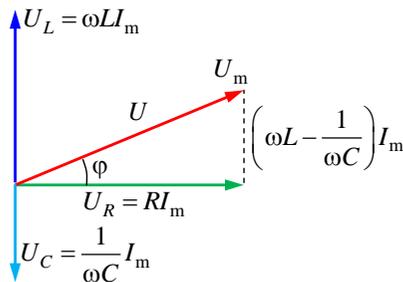
$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где  $I_m$  и  $\varphi$  определяются формулами:



$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$



Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

называется **полным сопротивлением цепи**.

Величина  $X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$

называется **реактивным сопротивлением**.

Таким образом,  $I_m = \frac{U_m}{Z}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}$ , причём  $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$ ,  $\sin \varphi = \frac{X}{Z}$ .

### 30. Резонанс напряжений

Если  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ , то  $\varphi = 0$  – **изменения тока и напряжения происходят**

**синфазно**. В этом случае  $Z = R$  и ток определяется только активным сопротивлением и достигает максимально возможного значения. Падение напряжения на конденсаторе  $U_C$  и на катушке индуктивности  $U_L$  одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется **резонансом напряжений (последовательным резонансом)**.

Частота

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

называется **резонансной**.

В случае механических колебаний таким фактором является **вынуждающая сила**  $F = F_0 \cos \omega t$ . Закон движения для пружинного маятника будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

В случае электрического колебательного контура роль  $X(t)$  играет подводимая к контуру внешняя ЭДС или переменное напряжение  $U = U_m \cos \omega t$ . Уравнение колебаний в контуре будет иметь вид

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t.$$

В общем виде **дифференциальное уравнение вынужденных колебаний** имеет вид

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = x_0 \cos \omega t.$$

Это уравнение – линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Его решение равно сумме *общего* решения  $s = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$  однородного уравнения и *частного* решения неоднородного уравнения. Можно показать, частное решение имеет вид

$$s = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $A$  и  $\varphi$  задаются формулами:

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Так **для электромагнитных колебаний**, если обозначить  $\alpha$  – сдвиг по фазе между зарядом и приложенным напряжением, то можно показать, что решение дифференциального уравнения будет иметь вид  $q = q_m \cos(\omega t - \alpha)$ , где

$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}$$

**Сила тока при установившихся колебаниях:**

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t - \alpha) = I_m \cos(\omega t - \alpha + \pi/2),$$

где

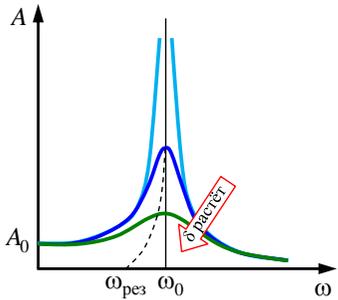
$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Силу тока можно записать в виде  $I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ , где  $\varphi = \alpha - \pi/2$  – **сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением**. Тогда можно показать, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

**28. Резонанс**

**Резонансом** называется явление *резкого возрастания амплитуды* вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы (или, в случае электрических колебаний, частоты вынуждающего переменного напряжения) к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы.



Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

имеет максимум

при частоте  $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ , которая называется **резонансной частотой**. (Первая производная знаменателя  $(-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\delta^2\omega = 0)$  обращается в нуль при  $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$ .)

$$A_{рез} = \frac{x_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

При  $\omega \rightarrow 0$  амплитуда достигает предельного значения  $A_0 = \frac{x_0}{\omega_0^2}$ , которое называется **статическим отклонением**. В случае **механических** колебаний:

$$A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

В случае **электромагнитных** колебаний:  $A_0 = \frac{U_m}{L\omega_0^2}$ .

При  $\omega \rightarrow \infty$ , амплитуда стремится к нулю.

В случае **мало затухания**, когда  $\delta^2 \ll \omega_0^2$ , резонансная амплитуда:

$$A_{рез} = \frac{x_0}{2\delta\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \frac{x_0}{\omega_0^2} = Q \cdot A_0,$$

где  $Q$  – добротность колебательной системы,  $A_0$  – статическое отклонение.

Таким образом, **добротность характеризует резонансные свойства** колебательной системы – чем больше  $Q$ , тем больше  $A_{рез}$ .

**29. Переменный ток**

**Переменным током** называются вынужденные колебания тока в цепи, совпадающие с частотой вынуждающей ЭДС.

Пусть переменная ЭДС (или переменное напряжение) имеет вид:

$$U = U_m \cos \omega t,$$

где  $U_m$  – амплитуда напряжения.

Тогда на участке цепи, имеющей сопротивление  $R$ , ёмкость  $C$  и индуктивность  $L$ , закон Ома будет иметь вид:

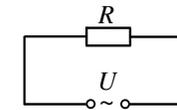
$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t$$

или

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = U_m \cos \omega t.$$

Рассмотрим частные случаи цепи.

(1)  $R \neq 0, C \rightarrow 0, L \rightarrow 0$ : переменное напряжение приложено к сопротивлению  $R$ . Закон Ома:



$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m \cos \omega t}{R} = I_m \cos \omega t.$$

Амплитуда силы тока:  $I_m = \frac{U_m}{R}$ .

**Колебания тока происходят в одной фазе с напряжением.**

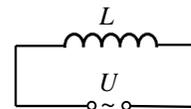


Для наглядности воспользуемся **методом векторных диаграмм** и будем изображать векторами, угол между которыми равен разности фаз.

(2)  $R \rightarrow 0, C \rightarrow 0, L \neq 0$ : переменное напряжение приложено к катушке индуктивности.

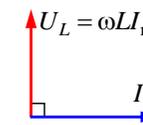
ЭДС самоиндукции в катушке:  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$ .

Закон Ома  $L \frac{dI}{dt} = U_L = U_m \cos \omega t$ , откуда после интегрирования получим:



$$I = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t = I_m \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

где  $I_m = \frac{U_m}{\omega L}$ .

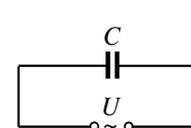


Таким образом, **падение напряжения  $U_L$  опережает по фазе ток  $I$ , текущий через катушку, на  $\frac{\pi}{2}$ .**

Величина  $R_L = \omega L$

называется **реактивным индуктивным сопротивлением**. Для постоянного тока ( $\omega = 0$ ) катушка индуктивности не имеет сопротивления.

(3)  $R \rightarrow 0, C \neq 0, L \rightarrow 0$ : переменное напряжение приложено к конденсатору.

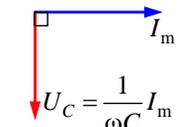


$$\frac{q}{C} = U_C = U_m \cos \omega t.$$

Сила тока

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega C U_m \sin \omega t = I_m \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

где  $I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{1/\omega C}$ .



Таким образом, **падение напряжения  $U_C$  отстаёт по фазе от текущего через конденсатор тока  $I$  на  $\frac{\pi}{2}$ .**