А. Боровой, Ю. Климов

Маятник Максвелла

«Важным разделом наших обязанностей является постановка иллюстративных опытов, поощрение других к постановке их и развитие всевозможными способами освещаемых ими идей. Чем проще материалы иллюстративного опыта и чем более они привычны учащемуся, тем глубже он поймет идею, которую должен иллюстрировать этот опыт. Воспитательная ценность таких опытов часто обратно пропорциональна сложности приборов.»

Эти слова Джеймса Клерка Максвелла — великого английского физика, стопятидесятилетие со дня рождения которого отмечается в этом году, как бы специально предназначены для Лаборатории «Кванта». В данной статье мы хотим обратиться к прибору, носящему его имя, — к так называемому маятнику Максвелла. Несложный в изготовлении, он часто демонстрируется на лекциях по механике и позволяет выявить ряд интересных закономерностей движения твердого тела.

Посмотрите на фотографию такого маятника (рис. 1). Это диск, насаженный на ось, к которой привязаны две нити (их верхние концы закреплены). Закрутите нити вокруг оси — диск поднимется. Теперь отпустите маятник — и он начинает совершать периодическое движение: сначала диск опускается, нити раскручиваются, диск вращается все быстрее и быстрее; дойдя до нижней точки и продолжая по инерции вращаться, диск меняет направление своего движения и поднимается вверх, нити накручиваются на ось, движение диска замедляется; в самой верхней точке маятник на мгновение останавливается и снова начинает свое движение вниз и т. д.

Сразу хотим предупредить читателей, что маятник будет колебаться устойчиво и достаточно долго, если соблюсти несколько условий. Сам диск должен быть относительно тяжелым ($m > 100$ г) и большим (диаметром 5—8 см), ось — тонкой (диаметром 4—5 мм) и «невесомой», а нити — прочными и достаточно длинными ($\sim 0{,}5$ м). Обратите внимание на то, чтобы диск находился строго посередине оси и был перпендикулярен к ней, а нити имели одинаковые длины.

Для изучения закономерностей движения маятника нам понадобят-

Рис. 1.

Рис. 2.

ся часы с секундной стрелкой (конечно, лучше — секундомер) и набор дисков — одного и того же радиуса, но разной толщины (массы), а также различных радиусов, но одной толщины. Диски удобно сделать съемными; один из способов их закрепления на оси показан на фотографии на рисунке 2.

Итак, начнем наши эксперименты. Наблюдения за колебаниями различных маятников дают первый результат — период колебаний, то есть полное время спуска и подъема маятника, не зависит от массы диска, а зависит от его радиуса, причем зависимость эта — почти прямая пропорциональная.

Далее, легко видеть, что с течением времени колебания довольно заметно затухают, причем чем меньше становится их амплитуда (максимальная высота подъема) и чем меньше скорость вращения диска, тем менее устойчиво ведет себя маятник. Интересно также проделать такой эксперимент: задавая некоторые возмущения (то есть выводя маятник из устойчивого состояния), проследить за их затуханием при движении маятника. Если, например, в момент запуска слегка повернуть диск в горизонтальной плоскости, то при своем падении он довольно быстро вернется к относительно устойчивому положению. Но если же отклонить маятник в плоскости его вращения, то практически до самого конца движения сохраняются оба колебания: вверх-вниз и в плоскости вращения.

Постараемся теперь объяснить часть наших экспериментальных результатов. Для простоты рассуждений предположим, что вся масса рассматриваемого диска сосредоточена на его поверхности, то есть что маятник — не диск, а обруч.

Обозначим радиус обруча через R, а радиус оси — через r (рис. 3). Рассмотрим маятник в тот момент, когда он опустился на расстояние h от верхнего положения. Каждая точка обруча, например точка A, одновременно участвует в двух движениях: в поступательном движении вместе с осью O вниз со скоростью $\vec{v}_0 = \vec{v}_{пост}$ и вращательном со скоростью $\vec{v}_{вр}$:

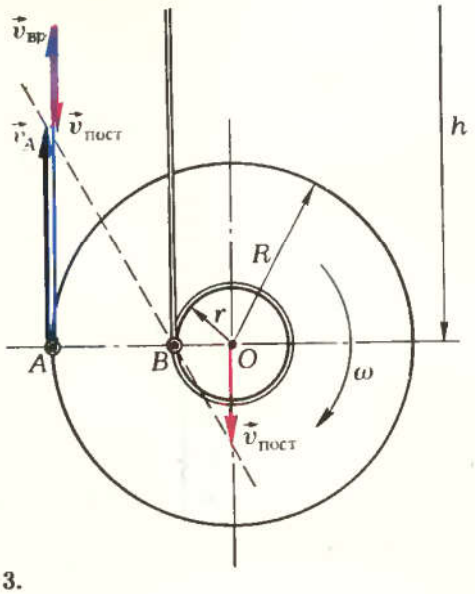

Рис. 3.

$$|\vec{v}_A| = |\vec{v}_{вр} + \vec{v}_{пост}|.$$

Нить разматывается без проскальзывания, и это означает, что мгновенная скорость точки B равна нулю. Поэтому движение маятника можно представить и как ряд последовательных поворотов вокруг мгновенного центра вращения B. Тогда справедливо равенство

$$\frac{v_0}{v_A} = \frac{r}{R-r}, \text{ или } \frac{v_{пост}}{v_{вр} - v_{пост}} = \frac{r}{R-r} \qquad (1)$$

(буквой v мы обозначили модуль той или иной скорости). Отсюда

$$\frac{v_{пост}}{v_{вр}} = \frac{r}{R}.$$

Теперь воспользуемся законом сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv_{пост}^2}{2} + \frac{mv_{вр}^2}{2}. \qquad (2)$$

Мы представили кинетическую энергию (правую часть равенства (2)) в виде двух слагаемых — энергии поступательного движения и энергии вращательного движения вокруг центра тяжести*).

Из кинематики известно, что

$$v_{пост}^2 = 2ah, \qquad (3)$$

где a — модуль ускорения поступательного движения маятника.

*) Возможность такого разбиения можно доказать и строго, но интуитивно это ясно и так.

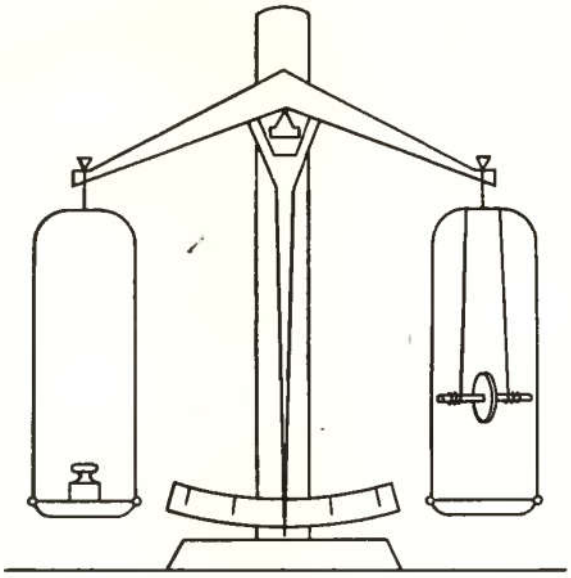

Рис. 4.

Таким образом, из уравнений (1)—(3) найдем:

$$a=\frac{g}{1+(R/r)^2}.$$

В нашем случае $R/r \gg 1$ (при этом условии выполняется требование «невесомости» оси), поэтому можно считать, что

$$a=g\left(\frac{r}{R}\right)^2. \qquad (4)$$

Если длина разматывающейся нити l, то $l=at^2/2$ и период колебаний маятника равен

$$T=2t=2\sqrt{\frac{2l}{a}}=2\frac{R}{r}\sqrt{\frac{2l}{g}}. \qquad (5)$$

Для диска формулы (4) и (5) соответственно преобразуются (см. «Дополнение»):

$$a=2g\left(\frac{r}{R}\right)^2, \qquad (4')$$

$$T=2\frac{R}{r}\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (5')$$

Теперь мы можем сравнить результаты расчетов и экспериментов. Из (4′) и (5′) видно, что и ускорение a, и период T не зависят от массы диска, но зависят от отношения радиусов R/r: чем больше R (по сравнению с r), тем меньше ускорение и, соответственно, больше период колебаний. Это действительно согласуется с экспериментом. Но если вы опыты проводили аккуратно, то заметили, что расчетный период (5′) меньше экспериментального. Это, как уже говорилось, связано с затуханием. А как вы думаете — где именно происходит наибольшая потеря энергии?

Наконец, можно проделать еще один очень эффектный опыт с маятником Максвелла, но для этого необходимы весы (рис. 4). Сначала при неподвижном маятнике приведите весы в равновесие, а затем отпустите маятник. Равновесие нарушится: маятник как бы станет легче. Почему? Объясните это самостоятельно.

Дополнение

Для тех, кто знаком с интегральным исчислением, приведем вывод формулы кинетической энергии вращающегося диска, откуда будет легко получить формулы (4′) и (5′).

Разобьем диск радиусом R на n тонких колец шириной Δx каждое (рис. 5). Кинетическая энергия одного кольца радиусом x и шириной Δx равна

$$\Delta E_к=(\varrho 2\pi x b\Delta x)\frac{\omega^2x^2}{2},$$

где ϱ — плотность материала диска, b — его толщина, ω — угловая скорость вращения, а выражение в скобках — масса выбранного кольца.

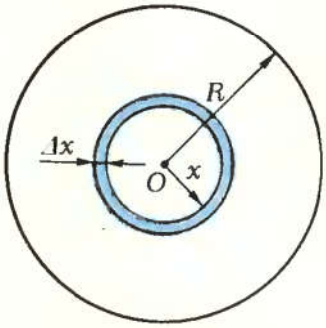

Рис. 5.

Кинетическая энергия всего диска приближенно равна сумме кинетических энергий отдельных колец:

$$E_к\approx\Sigma\Delta E_к.$$

Если перейти к пределу при n, стремящемся к бесконечности, приближенное равенство становится точным:

$$E_к=\lim_{n\to\infty}\Sigma\Delta E_к=$$

$$=\int_0^R\varrho 2\pi x b\frac{\omega^2x^2}{2}dx=$$

$$=\frac{\varrho\pi b\omega^2R^4}{4}=\frac{(\varrho\pi R^2b)\omega^2R^2}{4}=\frac{m\omega^2R^2}{4}.$$

Кинетическая энергия вращающегося обруча той же массы равна $mv^2/2=m\omega^2R^2/2$. Следовательно, кинетическая энергия диска в два раза меньше.

Формулы (4′) и (5′) выведите самостоятельно.