Уважаемые студенты!

Перед Вами курс лекций по физике для студентов ГУАП. Автор надеется, что это учебное пособие будет Вам полезно при подготовке к экзамену. Однако не рассчитывайте только на него. Каждый лектор рассказывает одно и то же по-разному. Не забывайте про конспект, который Вы вели в течение семестра. Возможно, что Ваш лектор читал что-то иначе. Каких-то вопросов, прочитанных Вашим лектором, Вы здесь, возможно, не найдете.

Всем Вам желаю отличных оценок на экзамене. Надеюсь, что это пособие поможет Вам.

Коваленко Иван Иванович

И. И. Коваленко

КУРС ФИЗИКИ

В 6 частях

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

И. И. Коваленко

Часть 1

МЕХАНИКА.
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ГУАП
Санкт-Петербург
2019

УДК 531/534
ББК 22.2
К56

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАЕН, ФТИ им. А. Ф. Иоффе *Н. Р. Галль*;
доктор физико-математических наук *В. Г. Фарафонов*

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия
Протокол № 8 от 11 ноября 2019 г.

Коваленко, И. И.

К56 Курс физики: учеб. пособие: в 6 ч. Ч. 1: Механика. Колебания и волны / И. И. Коваленко.– СПб.: ГУАП, 2019. – 177 с.

ISBN 978-5-8088-1429-5

Содержит теоретический материал по курсу физики для студентов. Главное внимание уделено разъяснению сути физических законов и их осмысленному применению.

В первой части курса физики представлены разделы «Механика», «Колебания и волны», которые в большинстве вузов изучаются студентами в первом семестре. Отдельные задачи и примеры, органично включенные в курс, являются его неотъемлемой частью. Объем пособия рассчитан на изучение дисциплины в течение трех семестров.

Предназначено для студентов и преподавателей высших учебных заведений всех технических направлений и специальностей. Соответствует рабочим программам по дисциплине Физика в рамках ФГОС 3++.

УДК 531/534
ББК 22.2

ISBN 978-5-8088-1429-5

© Санкт-Петербургский государственный
университет аэрокосмического
приборостроения, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемые читатели, перед вами учебное пособие, состоящее из шести частей, в каждой из которой изучается определенный раздел физики: 1 – механика, колебания и волны; 2 – термодинамика и молекулярная физика; 3 – электричество и магнетизм; 4 – волновая и квантовая оптика; 5 – квантовая механика, статистическая физика и элементы физики твердого тела; 6 – ядерная физика и физика элементарных частиц.

Казалось бы, все вы изучали физику в школе. Что нового может быть в этой книге?

Чтобы глубоко освоить физику, нужно один и тот же материал изучить несколько раз на разном уровне. Вы впервые знакомились с физическими величинами, явлениями, законами в 7–9 классах; в 10–11 классах этот же материал изучался более глубоко.

В вузе студенты изучают физику, которая, как любая точная наука, основана на аппарате высшей математики. Студент должен уметь дифференцировать, интегрировать, работать с векторами и с комплексными числами. Большинство разделов современной математики возникло из необходимости количественного описания физических явлений и построения физических моделей и теорий.

Физика базируется на математическом анализе, аналитической геометрии, алгебре и других разделах высшей математики. Она является фундаментом для всех естественно-научных и очень многих специальных технических дисциплин.

Изучению посвящено немало научных трудов и обучающей литературы. Пожалуй, основными изданиями, которые могут пригодиться студенту, являются следующие.

Первый том учебного пособия Иродова И. Е. [1] может быть полезен студентам в первом семестре обучения физике. В нем рассмотрены основные законы как нерелятивистской (ньютоновской), так и релятивистской механики – законы движения и законы сохранения импульса, энергии и момента импульса. На большом количестве

примеров и задач показано, как следует применять эти законы при решении различных конкретных вопросов.

В первую очередь это учебные пособия Савельева И. В. [2–5], которые знакомят студентов с основными идеями и методами физики. Главное внимание автора обращено на разъяснение физических законов и их сознательное применение. Однако материал в [2, 3] несколько перегружен математикой и иногда сложен для первокурсников.

В пособии Трофимовой Т. И. [6] изложены физические основы механики, молекулярной физики и термодинамики, электричества и магнетизма, оптики, квантовой физики атомов, молекул и твердых тел, физики атомного ядра и элементарных частиц. Написано просто и достаточно лаконично. Но, к сожалению, некоторые вопросы из рабочих программ по физике в нем отсутствуют.

Хотелось бы порекомендовать также классический учебник Фриша С. Э. и Тиморевой А. В. [7], написанный авторами для студентов технических вузов и университетов. В течение многих лет он был одним из основных курсов физики, выдержал множество переизданий, в том числе на иностранных языках. Учебник отличается ясностью логики и алгоритма изложения, простотой подачи материала. Первый том особенно поможет в изучении физики студентам в первом семестре. В нем рассматриваются физические основы механики, молекулярная физика, теория колебаний и волновая физика.

МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Кинематика изучает движение, лишь наблюдая за ним и не вдаваясь впричины, его побудившие.

1. Кинематика материальной точки

> *Материальная точка* – тело, размеры и форма которого не имеют значения в поставленной задаче.

Одно и то же тело в одной задаче может являться материальной точкой, а в другой – нет (автомобиль на пути из Петербурга в Москву – материальная точка, а тот же автомобиль, заезжающий в гараж, – нет). Положение и перемещение материальной точки задается в системе отсчета.

> *Система отсчета* – это система тел, которые в данной задаче рассматриваются как неподвижные, и дополнительно к ним – часы.

С системой неподвижных тел связывают систему координат. Самые простые координаты – декартовы. Это три взаимно ортогональные координатные оси в пространстве x, y, z.

Системы координат бывают правые и левые. Когда они изображены рядом, как на рис. 1.1, различие видно сразу, но очень трудно объяснить словами, в чем оно состоит. Системы координат как левая и правая рука: вроде бы и одинаковые, но левую перчатку на правую руку не наденешь.

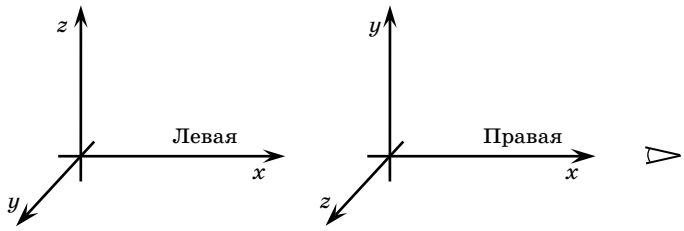


Рис. 1.1. Левая и правая системы координат

Если посмотреть на систему координат так, чтобы ось x была направлена в глаз, то мы увидим координатные оси y и z. Если поворот от y к z происходит по часовой стрелке, то система координат – левая, если против, – то правая.

Существенно, что в этом объяснении нам пришлось ссылаться на устройство часов, которые, в принципе, могли быть устроены иначе. Кроме того, всем объектам, системам и физическим процессам совершенно безразлично, в какой системе координат, правой или левой, мы их рассматриваем. Координатных осей, как мы понимаем, в природе нет. Это наши воображаемые вспомогательные построения. Однако некоторые формулы механики по-разному выглядят в правой и левой системах координат. Нужно выбрать и остановиться на одной координатной системе, а про другую навсегда забыть.

> В физике пользуются только правой системой координат.

Вдоль координатных осей откладывают единичные вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, которые имеют направления осей и длины, равные единице. Эти вектора называются *ортами*. Они задают направления координатных осей.

Радиус-вектором $\vec{r}$ называется вектор, проведенный из начала координат в выбранную точку. Любой вектор в трехмерном пространстве можно представить как сумму трех взаимно перпендикулярных векторов или как линейную комбинацию трех ортов:

$$\vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y + \vec{k} \cdot z. \qquad (1.1)$$

В этом выражении x, y, z – координаты концов радиус-вектора или проекции этого вектора на соответствующие координатные оси.

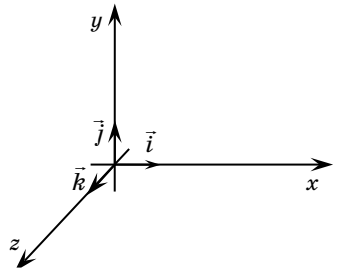


Рис. 1.2. Декартова система координат

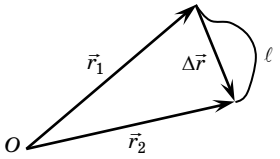


Рис. 1.3. Траектория и перемещение

Если материальная точка перемещается в пространстве, то есть $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то конец радиус-вектора вычерчивает в пространстве линию ℓ, которая называется *траекторией*. Длина этой линии – путь S, пройденный телом. Путь – скалярная сугубо положительная величина.

Вектор $\Delta\vec{r}$, соединяющий начало и конец траектории, называется *перемещением*. Подчеркнем, что перемещение – векторная величина. Длина этого вектора $|\Delta\vec{r}| \le S$. Равенство имеет место для перемещения вдоль прямой линии, при котором направление движения не меняется.

Скоростью материальной точки называется производная от радиус-вектора по времени:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.2)$$

Дробь, стоящая справа, – производная от радиус-вектора по времени есть отношение очень малого перемещения к промежутку времени, за который это перемещение происходит. Это перемещение настолько мало, что вектор $d\vec{r}$ практически не отклоняется от элемента траектории. Написанное равенство (1.2) обозначает, что векторы $\vec{\upsilon}$ и $d\vec{r}$ имеют одинаковое направление $\vec{\upsilon} \uparrow\uparrow d\vec{r}$.

> Скорость всегда направлена по касательной к траектории.

Продифференцируем выражение (1.1) по времени и получим:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\cdot\frac{dx}{dt} + \vec{j}\cdot\frac{dy}{dt} + \vec{k}\cdot\frac{dz}{dt} = \vec{i}\cdot\upsilon_x + \vec{j}\cdot\upsilon_y + \vec{k}\cdot\upsilon_z. \qquad (1.3)$$

Здесь $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ – проекции скорости на направления координатных осей.

Ускорением материальной точки называется производная по времени от скорости:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \qquad (1.4)$$

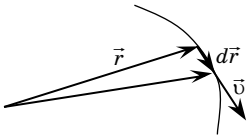


Рис. 1.4. Направление векторов $\vec{\upsilon}$ и $d\vec{r}$

Учитывая (1.2), ускорение есть вторая производная от радиус-вектора по времени:

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \tag{1.5}$$

Дифференцируем еще раз по времени выражение (1.3) и получаем:

$$\vec{a} = \vec{i} \cdot \frac{d\upsilon_x}{dt} + \vec{j} \cdot \frac{d\upsilon_y}{dt} + \vec{k} \cdot \frac{d\upsilon_z}{dt} = \vec{i} \cdot a_x + \vec{j} \cdot a_y + \vec{k} \cdot a_z. \tag{1.6}$$

Здесь a_x, a_y, a_z – проекции ускорения на направления координатных осей.

Рассмотрим плоское криволинейное движение по окружности с радиусом R. Таковым можно считать любое криволинейное движение на малом участке (рис. 1.5).

Здесь $\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории.

Запишем вектор скорости как произведение двух величин $\vec{\upsilon} = \vec{\tau} \cdot \upsilon$, первая из которых $\vec{\tau}$ задает направление вектора скорости, а вторая υ – его величину. Ускорение есть производная от вектора скорости по времени (1.4). По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$\vec{a} = \vec{\tau} \cdot \frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \tag{1.7}$$

Первое слагаемое в этой сумме есть *тангенциальное,* или *касательное,* ускорение. Оно задает изменение скорости по величине и направлено по касательной к траектории вдоль вектора $\vec{\tau}$. Его величина равна:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}. \tag{1.8}$$

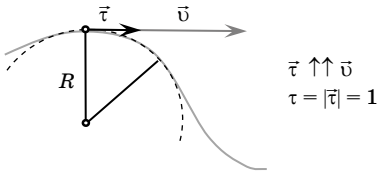


Рис. 1.5. Малый участок траектории при плоском криволинейном движении

Обсудим второе слагаемое в формуле (1.7). Для этого рассмотрим очень малое перемещение по окружности, когда вектор $\Delta\vec{r}$ практически совпадает с дугой, как это показано на рис. 1.6, *а*.

На рис. 1.6, *б* единичные векторы $\vec{\tau}$ отложены из одной точки. Видно, что их разность – $\Delta\vec{\tau}$ направлена к центру окружности вдоль вектора нормали $\vec{n}$. Если пренебречь кривизной дуги, то на рис. 1.6, *б* мы имеем два подобных равнобедренных треугольника, первый из которых образован двумя радиусами окружности и элементом дуги длиной ΔS, а второй – единичными векторами $\vec{\tau}$ и вектором $\Delta\vec{\tau}$. Из подобия этих треугольников следует:

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta S}{R}.$$

Поскольку $\vec{\tau}$ – единичный вектор, а $\Delta S = \upsilon\,\Delta t$, получаем равенство:

$$\Delta\tau = \frac{\upsilon\Delta t}{R} \text{ или } \frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{R}.$$

Устремим промежуток времени к нулю (при этом кривизной траектории пренебрегаем полностью) и заменим отношение приращений отношением дифференциалов, то есть производной:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\upsilon}{R}.$$

Именно эта производная, но только векторная, стоит в формуле (1.7). Модуль этого вектора мы нашли, а его направление показано

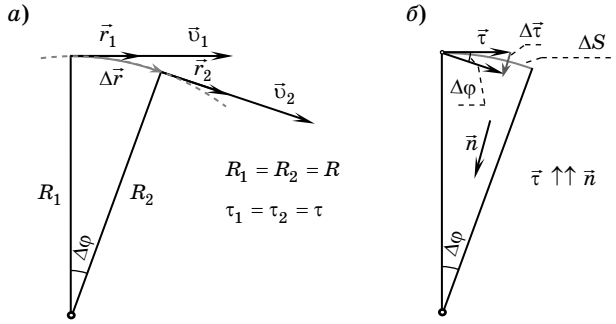


Рис. 1.6. Малое перемещение по дуге окружности

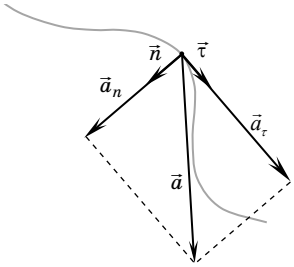


Рис. 1.7. Ускорение при криволинейном движении

на рис. 1.6 – вдоль вектора нормали $\vec{n}$ к центру окружности. Подставляем полученное в (1.7):

$$\vec{a} = \vec{\tau} \cdot \frac{d\upsilon}{dt} + \vec{n} \cdot \frac{\upsilon^2}{r}. \tag{1.9}$$

Второе слагаемое в этой сумме – *нормальное* ускорение. Его величина равна:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r}. \tag{1.10}$$

Оно задает изменение скорости по направлению и направлено к центру окружности. Поэтому иногда его называют *центростремительным*.

> При криволинейном движении ускорение, в отличие от скорости, направлено не по касательной к траектории, а под некоторым углом к ней.

Компоненты ускорения a_τ и a_n обязательно перпендикулярны друг другу, поэтому величину полного ускорения a можно найти по формуле:

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2}. \tag{1.11}$$

2. Кинематика абсолютно твердого тела

Абсолютно твердым телом (АТТ) называется тело, не меняющее своих размеров, формы и структуры в поставленной задаче.

> Расстояние между любыми двумя точками абсолютно твердого тела остается постоянным при любом движении.

Одно и то же тело может в одной задаче рассматриваться как абсолютно твердое, а в другой – нет (ключ, открывающий дверь, – абсолютно твердое тело, а ключ, потерянный во дворе, – скорее материальная точка).

Поступательным называется такое движение абсолютно твердого тела, при котором любая прямая, проходящая через него, остается параллельной самой себе.

При поступательном движении тело сохраняет свою ориентацию относительно системы координат.

Рассмотрим тело, двигающееся поступательно. Выберем две точки на нем A и B (рис. 2.1). Через некоторое время точка A переместится в A', а точка B соответственно в B'. При этом прямые (AB) и $(A'B')$ параллельны.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Поскольку тело}\\ \text{абсолютно твердое}\end{array}\right\} \Rightarrow \ |AB| = |A'B'|, \\ \left.\begin{array}{l}\text{Поскольку движение}\\ \text{поступательное}\end{array}\right\} \Rightarrow \ (AB) \parallel (A'B')\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\square ABB'A' \ - \text{параллелограмм}\right| \ \Rightarrow \ \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}.$$

За одно и то же время Δt две любые точки A и B перемещаются одинаково:

$$\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B. \qquad (2.1)$$

Поделим левую и правую части равенства (2.1) на промежуток времени Δt, устремим его к нулю и получим:

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_B. \qquad (2.2)$$

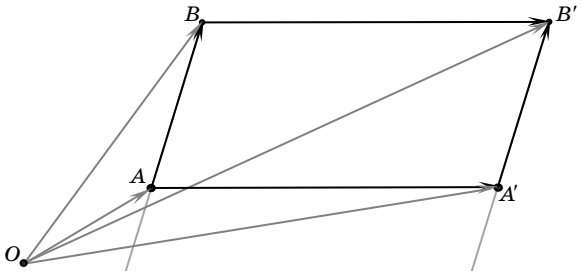


Рис. 2.1. Поступательное движение отрезка AB

Возьмем производную по времени от левой и правой частей равенства (2.2) и получим, что при поступательном движении любые точки A и B перемещаются с одинаковыми ускорениями:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B. \tag{2.3}$$

> При поступательном движении АТТ все его точки двигаются одинаково.

Суперпозиция нескольких поступательных движений является поступательным движением.

> *Вращательное движение* АТТ задается неподвижной осью, вокруг которой все точки тела двигаются по окружностям с центрами на этой оси. Плоскости этих окружностей перпендикулярны оси (рис. 2.2).

Вращение АТТ вокруг неподвижной оси задается функцией угла поворота от времени $\varphi\ (t)$. Угол поворота в международной системе единиц – СИ измеряется в радианах.

Угловая скорость – это производная от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{2.4}$$

Угловая скорость в системе единиц СИ измеряется в радианах за секунду.

Если рассмотреть полный оборот, при котором угол поворота 2π рад, а время равно периоду, получим еще одну удобную формулу:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{2.4, а}$$

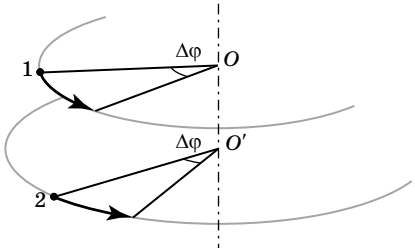


Рис. 2.2. Движение точек АТТ при вращении

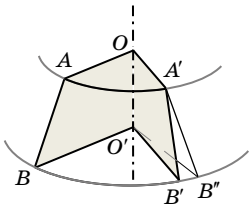


Рис. 2.3. Поворот двух точек при вращении

Угловое ускорение – это производная от угловой скорости по времени или вторая производная от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (2.5)$$

Угловое ускорение в СИ измеряется в радианах за секунду в квадрате.

> За одно и то же время все точки абсолютно твердого тела поворачиваются на один и тот же угол.

Иначе тело не было бы абсолютно твердым. Это утверждение кажется очевидным, но мы его докажем от противного.

Пусть абсолютно твердое тело вращается вокруг оси OO'. Выберем две точки этого тела A и B, которые лежат в одной плоскости $AOO'B$ с осью вращения, как это показано на рис. 2.3. Предположим, что одна из них (для определенности будем считать, что это точка B) вращается с большей угловой скоростью, чем точка A. Через некоторое время она повернется на больший угол, чем точка A, и выйдет из плоскости $OA'B'O'$. При этом обязательно окажется, что $|A'B''|>|A'B'|$.

Мы пришли к выводу, что расстояние между точками A и B увеличилось. Этого не может быть, поскольку рассматривается абсолютно твердое тело, у которого расстояние между любыми точками остается постоянным.

Значит, все точки абсолютно твердого тела вращаются с одинаковой угловой скоростью и поворачиваются на один и тот же угол.

Согласно определению (2.5) угловые ускорения всех точек тоже одинаковые.

Таким образом, угол поворота – φ; угловая скорость – ω и угловое ускорение – ε характеризуют вращение всего тела, а не отдельных его точек.

Мы рассмотрели два вида движений абсолютно твердого тела: поступательного и вращательного. Никаких других видов движения у абсолютно твердого тела нет.

> Любое движение абсолютно твердого тела сводится к суперпозиции поступательного и вращательного(ых) движений.

3. Связь линейных и угловых величин

Угол поворота φ связан с длиной дуги S и радиусом окружности R соотношением (рис. 3.1):

$$\varphi = \frac{S}{R}. \tag{3.1}$$

Фактически это соотношение есть определение радианной меры угла. Продифференцируем соотношение (3.1) по времени и, учитывая, что радиус окружности не меняется, получим связь линейной и угловой скоростей:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dS}{dt}, \quad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{\upsilon}{R},$$

$$\upsilon = \omega R. \tag{3.2}$$

Еще раз продифференцируем по времени получившееся выражение и получим связь тангенциального и углового ускорений:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{d\upsilon}{dt}, \quad \Rightarrow \qquad \varepsilon = \frac{a_\tau}{R},$$

$$a_\tau = \varepsilon R. \tag{3.3}$$

Абсолютно твердое тело может совершать одновременно несколько вращений вокруг разных осей. Если эти оси параллельны, угловые скорости и угловые ускорения нужно складывать или вычитать в зависимости от направления вращения. Если же различные оси не параллельны друг другу, складывать такие вращения нужно векторно.

Направление угла поворота логично выбрать вдоль оси вращения по правилу буравчика (рис. 3.2).

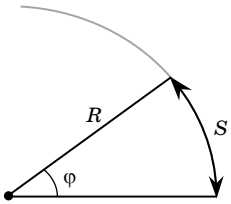


Рис. 3.1. Радианная мера угла

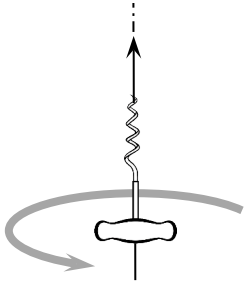


Рис. 3.2. Выбор направления угла

Разберемся, можно ли считать угол поворота вектором. Сложение любых векторов должно быть коммутативным:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}.$$

Возьмем тело (например, кирпич) и направим координатные оси вдоль его ребер, как это показано на рис. 3.3, *а*. Повернем его на угол $\varphi_x = 90°$ по часовой стрелке вокруг оси (*ox)*. После этого повернем на угол $\varphi_y = 90°$ по часовой стрелке вокруг оси (*oy*). Результат двух этих действий показан на том же рисунке.

Вернемся к исходной ориентации тела и совершим те же повороты в другом порядке: сначала вокруг оси (*oy*), а затем вокруг оси (*ox)*, как это показано рис. 3.3, *б*.

Очевидно, что окончательный результат двух поворотов вокруг разных осей зависит от очередности выполнения этих поворотов:

$$\varphi_x + \varphi_y \neq \varphi_y + \varphi_x.$$

Мы убедились в том, что поворот вокруг оси – некоммутативная операция. Угол поворота не является вектором. Однако направление, определяемое правилом буравчика, все-таки имеет смысл.

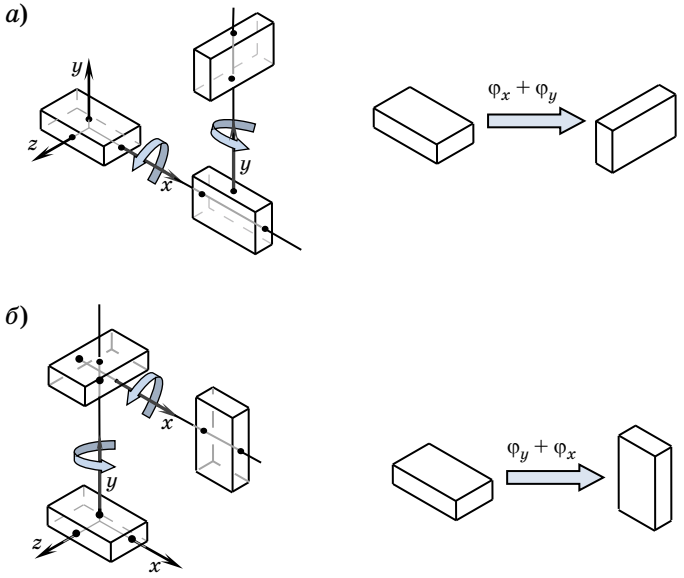


Рис. 3.3. Поворот тела вокруг оси (ox), затем вокруг оси (oy)– а; поворот тела вокруг оси (oy), затем вокруг оси (ox) – б

Рассмотрим два поворота тела на очень малые углы $\Delta\varphi_x$ и $\Delta\varphi_y$ вокруг соответствующих координатных осей. В этом случае результат двух поворотов практически не зависит от порядка совершения этих поворотов:

$$\Delta\varphi_x + \Delta\varphi_y \approx \Delta\varphi_y + \Delta\varphi_x.$$

Если от конечных приращений $\Delta\varphi_x$ и $\Delta\varphi_y$ перейти к бесконечно малым дифференциалам $d\varphi_x$ и $d\varphi_y$, то написанное равенство станет абсолютно точным:

$$d\varphi_x + d\varphi_y = d\varphi_y + d\varphi_x.$$

Следовательно, *бесконечно малые углы являются векторами* $d\varphi \to d\vec{\varphi}$.

В определении угловой скорости (2.4) мы пользовались дифференциалом угла. Поэтому угловая скорость тоже является вектором:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (3.4)$$

Сведения из математики

Векторное произведение векторов $\vec{c} = \left[\vec{a}\vec{b}\right]$.

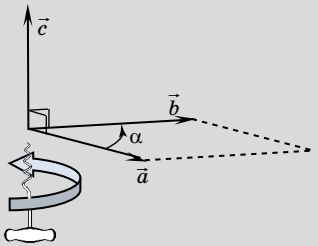


Рис. 3.4. Определение направления векторного произведения

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, перпендикулярный обоим сомножителям и направленный по правилу буравчика, если вращать его ручку от конца первого вектора к концу второго. Длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$c = ab \cdot \sin\alpha.$$

Направления векторов $\vec{\omega}$ и $d\vec{\varphi}$ одинаковые. Направление вектора угловой скорости связано с направлением вращения точек тела правилом буравчика.

Угловое ускорение было определено формулой (2.5), поэтому оно тоже является вектором:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{3.5}$$

Его направление совпадает с направлением вектора $d\vec{\omega}$. Если ось вращения закреплена, то $\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$ или $\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$. Если же ось вращения тела не закреплена, то векторы $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ могут иметь различные направления.

Выражение (3.2) связывает три величины υ, ω, R, каждая из которых является вектором. На рис. 3.5 показаны направления этих векторов для точки, движущейся по окружности. Эти векторы взаимно перпендикулярны.

Учитывая связь между длинами рассматриваемых векторов и их взаимную ориентацию, выражение (3.2) можно переписать в векторном виде:

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}\vec{R}\right]. \tag{3.6}$$

Левую и правую части в формуле (3.6) помножим на dt:

$$\vec{\upsilon}dt = \left[\vec{\omega}dt\,\vec{R}\right].$$

Учтем, что $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$ и $d\vec{\varphi} = \vec{\omega}dt$ (это следует из формул (1.2) и (3.4)), и получим:

$$d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi}\,\vec{R}\right]. \tag{3.7}$$

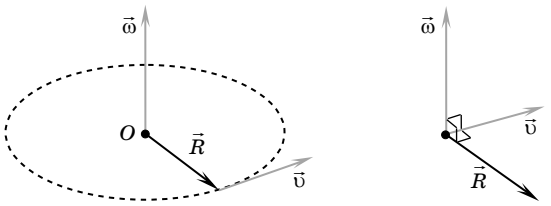


Рис. 3.5. Направления векторов $\vec{\upsilon}$, $\vec{\omega}$, $\vec{R}$ при движении точки по окружности

Вернемся к выражению (3.6) и продифференцируем по времени его левую и правую части:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega}\vec{R}\right] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{R}\right] + \left[\vec{\omega}\frac{d\vec{R}}{dt}\right] = \left[\vec{\varepsilon}\vec{R}\right] + \left[\vec{\omega}\vec{\upsilon}\right] = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon}\vec{R}\right], \tag{3.8}$$

$$\vec{a}_n = \left[\vec{\omega}\vec{\upsilon}\right]. \tag{3.9}$$

Получены формулы связи линейных $\left(d\vec{r}, \upsilon, \vec{a}_n, \vec{a}_\tau\right)$ и угловых $\left(d\vec{\varphi}, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}\right)$ величин. В формулах связи используется мгновенный радиус окружности $\vec{R}$.

Рассмотрим произвольное движение абсолютно твердого тела, при котором ось вращения не закреплена. Эта ось сама может двигаться поступательно (рис. 3.6) или вращаться вокруг другой оси (рис. 3.7).

Если движение колеса происходит без проскальзывания, то за время одного оборота T проходится путь, равный длине обода коле-

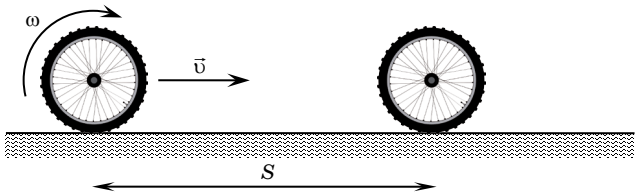


Рис. 3.6. Суперпозиция поступательного и вращательного движений колеса

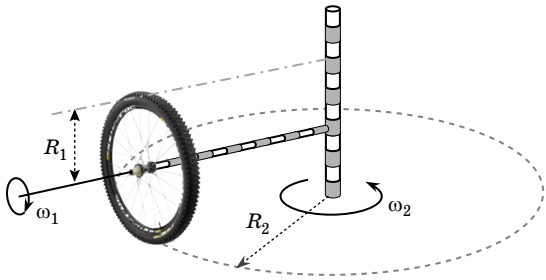


Рис. 3.7. Колесо, совершающее два вращения одновременно

са $S = 2\pi R$. Найдем скорость равномерного поступательного движения в этом случае:

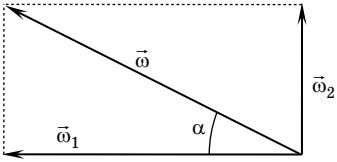
$$\upsilon = \frac{S}{t} = \frac{2\pi R}{T} = \omega R.$$

Получена связь скорости поступательного движения и угловой скорости вращения для колеса, катящегося без проскальзывания, совпадающая с формулой (3.2).

На рис. 3.7 показано колесо, совершающее два вращения одновременно. Колесо вращается вокруг своей собственной оси с угловой скоростью ω_1, а ось колеса, в свою очередь, вращается вокруг неподвижной вертикальной оси с угловой скоростью ω_2.

Если движение происходит без проскальзывания, то линейная скорость центра колеса связана с угловой скоростью ω_1 соотношением $\upsilon = \omega_1 R_1$. Аналогичное соотношение справедливо и для второго вращения – вокруг вертикальной оси $\upsilon = \omega_2 R_2$. Следовательно, $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$. Полная угловая скорость $\vec{\omega}$ в этой системе находится сложением векторов $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$



$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

Рис. 3.8. Сложение двух вращений колеса

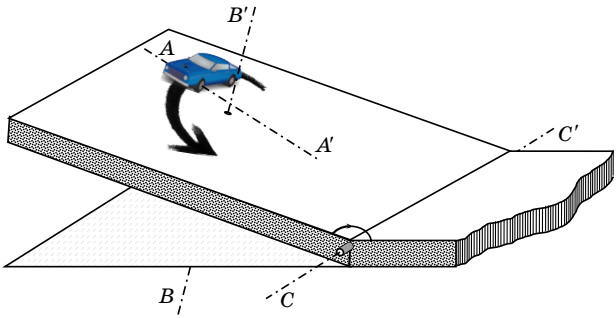


Рис. 3.9. Разворот автомобиля на мосту

Направление вектора $\vec{\omega}$ определяет направление мгновенной оси вращения.

На рис. 3.9 изображен автомобиль, разворачивающийся на разводном мосту, проезжая часть которого в этот момент поднимается, то есть вращается вокруг горизонтальной оси.

Колесо автомобиля вращается вокруг своей собственной оси AA'. Автомобиль разворачивается вокруг оси BB'. Дорожное полотно при этом еще и поворачивается вокруг оси CC'. Таким образом, автомобильное колесо участвует одновременно в трех вращениях.

> Максимальное количество независимых вращений, которые одновременно может совершать тело, равно трем.

4. Обобщенные координаты и степени свободы

Нам уже знакомы декартовы координаты – x, y, z, задающие положение точки в пространстве (рис. 1.2). Эта координатная система хорошо приспособлена для очень широкого круга задач, но в некоторых случаях пользоваться ею неудобно. Никому из нас не придет в голову задавать с помощью декартовых координат положение тела на поверхности Земли. Для этой цели служат хорошо известные географические координаты: широта – θ и долгота – φ, показанные на рис. 4.1.

Эти координаты угловые. С их помощью задается положение точки на поверхности Земли или глобуса, например, положение корабля на поверхности океана. Обратим внимание, что речь идет

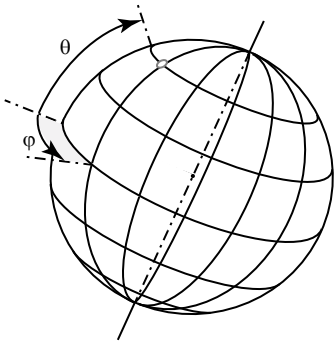


Рис. 4.1. Географические координаты

именно о поверхности, задать с их помощью положение точки в пространстве невозможно. Нужна третья координата – высота над уровнем моря. В математике обычно используют расстояние до начала отсчета – *r*. Такая система координат называется сферической[1].

То, что координат именно три, не случайно. Это вытекает из трехмерности нашего пространства. Для двумерной поверхности достаточно двух координат. Можно ли и нужно ли создать еще какие-то координатные системы? Координатные системы создаются под конкретную задачу. Например, ряд и место в зрительном зале – это две координаты, определяющие место в зале. Есть общие правила построения координатных систем.

1. Каждая точка в пространстве должна иметь координаты. Не должно быть точек без координат[2].

2. У каждой точки в пространстве должен быть единственный набор координат, то есть у одной точки не может быть нескольких разных наборов координат.

3. У разных точек не может быть одинаковых координат. Хотя бы одна координата у разных точек должна отличаться.

Прежде чем сформулировать четвертое правило, нужно ввести одно понятие:

> Линиями координатной сетки называются линии, при движении вдоль которых меняется только одна координата.

В декартовых координатах – это линия, идущая параллельно одной из координатных осей.

В сферических координатах – это параллели, меридианы и отвесные линии.

Различные линии координатной сетки, при движении вдоль которых меняется одна и та же координата, не пересекаются. Пересекаться могут линии, при движении вдоль которых меняются разные координаты.

4. Линии координатной сетки могут пересекаться только под прямым углом. Строго говоря, в точке пересечения двух линий координатной сетки касательные к ним взаимно перпендикулярны.

Параллели перпендикулярны меридианам.

И те, и другие перпендикулярны высотам.

---

[1] В математике широту θ обычно измеряют не от экватора, а от полюса.

[2] Иногда допускается конечное число точек с одной неопределенной координатой. Например, на северном и южном полюсах нет долготы.

Если удалось создать набор величин, удовлетворяющих сформулированным выше правилам, то значит, создана *система обобщенных координат*.

Рассмотрим движение точки вдоль линии координатной сетки. Согласно определению в этом случае меняется только одна координата. Следовательно, такое движение задается функцией от времени лишь одной координаты. От других координат такое движение не зависит.

> Возможность тела или системы совершать движение, зависящее только от одной координаты, называется степенью свободы.

> Число степеней свободы равно числу независимых координат, однозначно задающих положение тела или состояние системы.

Положение свободной материальной точки в пространстве задается тремя координатами, например декартовыми x, y, z. Значит, *свободная материальная точка имеет три степени свободы*.

Если движение материальной точки возможно только в плоскости, то для его описания достаточно двух координат, например x, y. В этом случае материальная точка имеет две степени свободы.

Если движение материальной точки происходит по какой-либо поверхности, то число координат, задающих положение точки на ней, равно двум. Например, положение точки на сфере, как мы уже знаем, задается широтой – θ и долготой – φ. *Число степеней свободы при движении материальной точки по двумерной поверхности равно двум*.

Рассмотрим движение локомотива по рельсам. Он не может свернуть с рельсов. Положение локомотива задается одной координатой, даже если рельсы непрямые. Значение этой координаты откладывается на километровых столбах. Такое движение имеет одну степень свободы.

Рассмотрим систему двух связанных материальных точек в пространстве, показанных на рис. 4.2.

Положение каждой из этих материальных точек задается тремя координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2. Расстояние между этими точками при любом их движении остается постоянным и равным ℓ. Это расстояние выражается через координаты точек с помощью теоремы Пифагора для трехмерного пространства.

$$\ell^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \qquad (4.2)$$

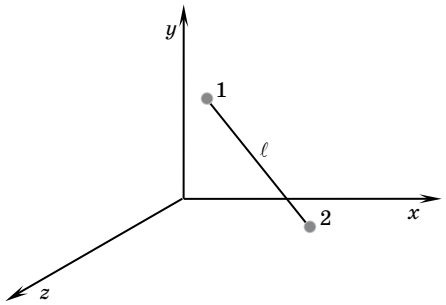


Рис. 4.2. Две связанные материальные точки в пространстве

Написанное уравнение является уравнением связи. Оно обозначает, что шесть координат связаны друг с другом. Одну любую координату можно выразить через пять других. Таким образом, независимыми являются лишь пять координат. *Число степеней свободы у двух связанных материальных точек в пространстве равно пяти*.

Зададим себе вопрос, почему две связанные материальные точки имеют меньше степеней свободы, чем эти же точки, взятые по отдельности? Ответ в том, что между точками существует *связь*, то есть ограничение движения. Если движение ограничивается, то есть возможностей для движения становится меньше, то и степеней свободы тоже становится меньше. *Каждая действующая в системе связь уменьшает число степеней свободы на единицу.* Число степеней свободы i в системе связанных материальных точек равно:

$$i = 3N - L. \qquad (4.3)$$

В этой формуле N – число материальных точек в системе; L – число действующих между ними связей.

Рассмотрим систему, состоящую из трех жестко связанных материальных точек, показанных на рис. 4.3.

Жесткость этой системы обеспечивают три связи, значит согласно формуле (4.3) $i = 3N - L = 3 \times 3 - 3 = 6$. Число степеней свободы трех жестко связанных материальных точек равно шести.

Рассмотрим систему, состоящую из четырех жестко связанных материальных точек, показанных на рис. 4.4. Понятно, что эти точки не обязаны лежать в одной плоскости. Они образуют *тетраэдр*.

Жесткость этой системы обеспечивают шесть связей. Согласно формуле (4.3) $i = 3N - L = 3 \times 4 - 6 = 6$. Число степеней свободы четырех жестко связанных материальных точек равно шести.

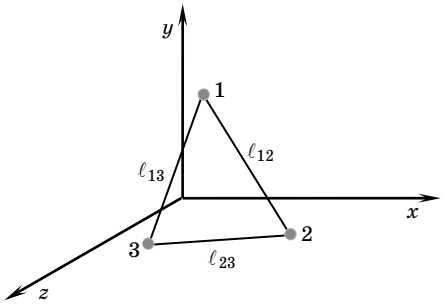


Рис. 4.3. Три связанные материальные точки в пространстве

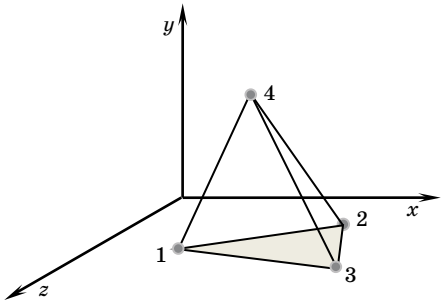


Рис. 4.4. Четыре связанные материальные точки в пространстве

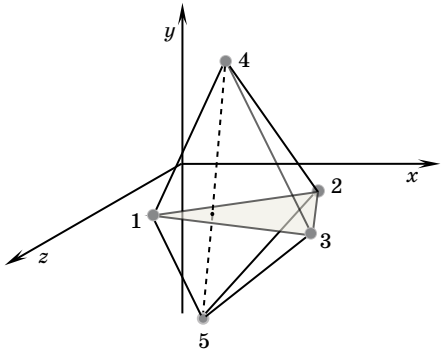


Рис. 4.5. Пять связанных материальных точек в пространстве

Рассмотрим систему, состоящую из пяти жестко связанных материальных точек. Понятно, что эти точки не обязаны лежать в одной плоскости. Их расположение в общем случае показано на рис. 4.5.

Казалось бы, между пятью точками имеется десять связей. Однако связь ℓ_{45} лишняя. Она не работает, не создает дополнительной жесткости конструкции. Недействующие связи не учитываются в формуле (4.3). Жесткость системы из пяти материальных точек обеспечивают девять связей:

$$i = 3N - L = 3 \times 5 - 9 = 6.$$

Число степеней свободы пяти связанных материальных точек равно шести.

Соберем воедино все полученные данные.

Анализируя приведенную таблицу, приходим к выводу, что система из трех и более жестко связанных материальных точек имеет шесть степеней свободы. Абсолютно твердое тело тоже является системой жестко связанных материальных точек.

> Свободное абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы.

Каждой степени свободы нужно сопоставить координату или движение, которому она соответствует. Абсолютно твердое тело может совершать поступательное движение, которое задается тремя декартовыми координатами. Кроме того, абсолютно твердое тело может вращаться. Если тело свободно, то есть его ось не закреплена, то вращение задается тремя углами поворота. Итак, шесть степеней свободы абсолютно твердого тела соответствуют трем декартовым и трем угловым координатам.

Таблица 1

Число степеней свободы в системах жестко связанных материальных точек

Количество материальных точек в системе	Количество связей между материальными точками	Число степеней свободы
1	0	3
2	1	5
3	3	6
4	6	6
5	9	6

5. Основная задача кинематики

Вернемся к кинематике материальной точки. В первой главе вводились три функции времени – три характеристики движения. Это:

– закон движения материальной точки $\vec{r}(t)$,

– скорость материальной точки $\vec{\upsilon}(t)$,

– ускорение материальной точки $\vec{a}(t)$.

Если все эти функции известны, то о движении материальной точки известно все. Если же одна или две из названных функций не известны, то возникает задача – *по известной функции восстановить неизвестную.* Это и есть основная задача кинематики. Задача может быть поставлена в векторной или координатной формах, в том числе и для любых обобщенных координат.

> Если по закону движения нужно найти закон скорости или по закону скорости нужно найти закон ускорения, то такая задача называется прямой:
>
> $$\vec{r}(t) \;\rightarrow\; \vec{\upsilon}(t) \;\rightarrow\; \vec{a}(t).$$

Прямая задача решается согласно определению скорости и ускорения дифференцированием и особой сложности обычно не представляет.

Пример 5.1. Движение материальной точки происходит вдоль оси (ox) согласно закону $x\,(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$; значения коэффициентов A, B, C, D известны. Найти скорость и ускорение точки в момент времени $t = 2$ с.

Дано:
$A = 0{,}1$ м/с^3
$B = 0{,}3$ м/с^2
$C = 0{,}6$ м/с
$D = 1{,}5$ м
$t = 2$ с

$\upsilon\,(t) = ?$
$a\,(t) = ?$

Решение:
Согласно определению скорости

$$\upsilon = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\left(At^3 + Bt^2 + Ct + D\right)}{dt} =$$

$$= A\frac{dt^3}{dt} + B\frac{dt^2}{dt} + C\frac{dt}{dt} + \frac{dD}{dt}.$$

$$\upsilon(t) = 3At^2 + 2Bt + C;$$

$$\upsilon(2) = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 4 + 2 \cdot 0{,}3 \cdot 2 + 0{,}6 = 1{,}2 + 1{,}2 + 0{,}6 = \underline{3{,}0\ (м/с)}.$$

Согласно определению ускорения

$$a = \frac{d\upsilon(t)}{dt} = \frac{d\left(3At^2 + 2Bt + C\right)}{dt} = 3A\frac{dt^2}{dt} + 2B\frac{dt}{dt} + \frac{dC}{dt}.$$

$$a(t) = 6At + 2B; \qquad a(2) = 6 \cdot 0{,}1 \cdot 2 + 2 \cdot 0{,}3 = \underline{1{,}8(\text{м}/\text{с}^2)}$$

Ответы:

$$\upsilon = 3{,}0\,м/с; \quad a = 1{,}8\,м/с^2.$$

Если по зависимости ускорения от времени нужно найти зависимость скорости от времени или по зависимости скорости от времени нужно найти закон движения, то такая задача называется обратной:

$$\vec{a}(t) \;\rightarrow\; \vec{\upsilon}(t) \;\rightarrow\; \vec{r}(t).$$

Обратная задача решается интегрированием, а потому обычно существенно сложнее, чем прямая. Кроме того, для решения обратной задачи необходимо знать начальные условия.

Метод решения основной обратной задачи кинематики.

Согласно определению ускорения $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$; $\Rightarrow d\vec{\upsilon} = \vec{a}(t)dt$; интегрируем:

$$\int_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}(t)} d\vec{\upsilon} = \int_0^t \vec{a}(t)dt.$$

Под левым интегралом стоит функция, равная единице. Первообразная от нее равна $\vec{\upsilon}$. Согласно формуле Ньютона – Лейбница левый интеграл равен разности первообразных на верхнем и нижнем пределах:

$$\int_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}(t)} d\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t) - \vec{\upsilon}_0.$$

Значит, $\vec{\upsilon}(t) - \vec{\upsilon}_0 = \int_0^t \vec{a}(t)dt$ или

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt. \qquad (5.1)$$

Решение первой части задачи – зависимость скорости от времени – находится интегрированием выражения (5.1)[1].

Согласно определению скорости $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$; $\Rightarrow d\vec{r} = \vec{\upsilon}(t)dt$; интегрируем:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{\upsilon}(t)dt.$$

Первообразная от функции под левым интегралом равна $\vec{r}$. Левый интеграл равен разности первообразных на верхнем и нижнем пределах:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0.$$

Значит, $\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_0^t \vec{\upsilon}(t)dt$,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{\upsilon}(t)dt. \qquad (5.2)$$

Решение второй части задачи – определение закона движения тела – производится интегрированием выражения (5.2)[1]. Если функция $\vec{\upsilon}(t)$ неизвестна, то можно воспользоваться формулой (5.1):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \left(\vec{\upsilon}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt \right) dt = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{\upsilon}_0 dt + \int_0^t \int_0^t \vec{a}(t)dtdt;$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \int_0^t \int_0^t \vec{a}(t)dtdt. \qquad (5.3)$$

Закон движения материальной точки находится двукратным интегрированием зависимости ускорения от времени[1].

---

[1] Вообще говоря, предел интегрирования t и переменная в функции $a(t)$ – это разные математические величины. Они должны обозначаться разными символами. Однако физически это одно и то же время – t. Поэтому, осознавая некоторую математическую некорректность, все-таки продолжим.

Пример 5.2. Свободный полет тела в однородном поле силы тяжести.

Снаряд вылетел из пушки с некоторой начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$ под углом α к горизонту. Найти положение снаряда в любой момент времени.

Для определения скорости снаряда воспользуемся формулой (5.1):

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt = \vec{\upsilon}_0 + \int_0^t \vec{g}dt = \ldots$$

Константу $\vec{g}$ можно вынести из-под интеграла:

$$\ldots = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}\int_0^t dt = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t.$$

Мы нашли скорость снаряда как функцию времени:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t. \qquad (5.4)$$

В этой формуле присутствует начальная скорость снаряда, которая задается либо тремя проекциями начальной скорости снаряда на координатные оси υ_{ox}, υ_{oy}, υ_{oz}, либо величиной начальной скорости υ_o и двумя углами.

Закон движения снаряда найдем с помощью формулы (5.3):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \int_0^t\int_0^t \vec{g}dtdt = \ldots$$

Константу $\vec{g}$, как и в предыдущем случае, выносим из-под интеграла:

$$\ldots = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \vec{g}\int_0^t\int_0^t dtdt = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \vec{g}\int_0^t tdt = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

Мы нашли закон движения снаряда:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}. \qquad (5.5)$$

В этой формуле присутствуют начальная скорость снаряда и его начальное положение. Два векторных начальных условия эквивалентны шести скалярным.

При решении этой задачи получились известные из школьного курса физики формулы (5.4) и (5.5). Этого и следовало ожидать, ведь мы рассматривали движение с постоянным ускорением, подробно изученное в школьном курсе физики.

Пример 5.3. Поезд начинает тормозить при скорости $\upsilon_0 = 20$ м/с. Тормозной механизм включается постепенно, создавая ускорение $a(t) = -\alpha \cdot t$, где $\alpha = 0{,}1$ м/с^3. Найти время торможения T и длину тормозного пути ℓ.

Движение поезда ускоренное, но не равноускоренное, поэтому известные из школьного курса физики формулы для этого случая не годятся.

Дано:
$\upsilon_0 = 20$ м/с
$a(t) = -\alpha \cdot t$
$\alpha = 0{,}1$ м/с^3

$T = ?$
$\ell = ?$

Решение:
Воспользуемся формулой (5.1):

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + \int_0^t a(t)dt = \upsilon_0 - \int_0^t \alpha t dt = \upsilon_0 - \alpha \int_0^t t dt.$$

Поскольку первообразная функции t равна $\frac{t^2}{2}$,

$$\Rightarrow \quad \upsilon(t) = \upsilon_0 - \frac{\alpha t^2}{2}\bigg|_0^t = \upsilon_0 - \left(\frac{\alpha t^2}{2} - \frac{\alpha 0^2}{2}\right) = \upsilon_0 - \frac{\alpha t^2}{2}.$$

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 - \frac{\alpha t^2}{2}.$$

Получена зависимость скорости от времени.

Поскольку в момент остановки при $t = T$ скорость равна нулю, имеем:

$$\upsilon_0 - \frac{\alpha T^2}{2} = 0; \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{2\upsilon_0}{\alpha}}. \qquad T = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{0{,}1}} = 20 \text{ с}.$$

Продолжим решать вторую часть задачи:

$$S(t) = S_0 + \upsilon_0 t + \int_0^t \int_0^t a(t)dtdt = S_0 + \upsilon_0 t - \alpha \int_0^t \int_0^t t dt dt = S_0 + \upsilon_0 t - \frac{\alpha}{2} \int_0^t t^2 dt;$$

$$S(t) = S_0 + \upsilon_0 t - \frac{\alpha t^3}{6}.$$

По смыслу задачи $S_0 = 0$. При $t = T$ в момент остановки $S(T) = \ell$:

$$\ell = \upsilon_0 T - \frac{\alpha T^3}{6} = 20 \cdot 20 - \frac{0{,}1 \cdot 20^3}{6} = 400 - 133{,}3 = 266{,}7 (\text{м}).$$

Ответы:
$T = 20$ с; $\ell = 266{,}7$ м.

Подведем итоги:

– обратная задача действительно оказалась существенно сложнее прямой;

– для ее решения нам понадобились два начальных условия: начальная скорость υ_0 и начальная координата $S_0 = 0$.

ДИНАМИКА

Динамика изучает движение вместе с причинами, его вызывающими.

6. Законы Ньютона

1. Закон инерции

До Ньютона господствовало учение Аристотеля – древнегреческого философа, который первым написал научный труд с названием «Физика». (от греч. φύσις – природа). Аристотель никогда не занимался физическим экспериментом. Он наблюдал и размышлял. Его учение не было физикой в современном понимании этого термина. Это была умозрительная метафизика. Основная мысль Аристотеля – *не нужно объяснять сложно, если можно объяснить просто.* Естественным состоянием тела он считал покой. Скорость полагалась пропорциональной приложенной к телу силе:

$$\upsilon \sim F.$$

Действительно, два раба тащат по земле бревно быстрее, чем один. Это естественно, это понятно, однако написанная выше формула из этого не следует.

Первым к пониманию того, что нужно объяснять не скорость тела, а ее изменение, еще до Ньютона пришел Галилей.

Толкнем шайбу вдоль пола. Она переместится на некоторое расстояние и остановится. Толкнем шайбу по льду. Она переместится

на большее расстояние и опять остановится. Сила трения шайбы о лед меньше, чем о пол, поэтому пройденное расстояние больше. Нагреем шайбу и снова толкнем ее по льду. Сила трения стала еще меньше, и шайба переместилась еще дальше. Если совсем исключить взаимодействие шайбы с поверхностью, то она будет двигаться очень долго, сохраняя при этом свою начальную скорость. Обобщение экспериментальных фактов приводит нас к выводу, что *тело, не подверженное действию других тел, движется прямолинейно и равномерно*. Осталось только уточнить, в какой системе отсчета это происходит.

Современная формулировка *первого закона Ньютона*:

Существуют такие системы отсчета, в которых свободное тело[1] *сколь угодно долго движется прямолинейно и равномерно.*

Такие системы отсчета называются инерциальными. Это самые удобные системы отсчета. Законы механики в них формулируются проще всего. В дальнейшем почти всегда мы будем рассматривать движение относительно инерциальных систем отсчета.

2. Основной закон динамики

Перед формулировкой *второго закона Ньютона* нужно дать определение силы. *Сила* – это векторная величина, характеризующая воздействие одного тела на другое. Логически строгого определения силы не существует. В таких случаях в физике определение дается через *процедуру измерения величины*. Идея такая: если мы знаем, чему равна сила в любой точке в любой момент времени, то тем самым мы знаем, что такое сила.

Чтобы измерить приложенную к телу силу, нужно с помощью динамометра (рис. 6.1) приложить компенсирующую силу, которая равна приложенной. Сила упругости сжатой пружины может быть вычислена по закону Гука:

$$F_{упр} = kx. \qquad (6.1)$$

В этой формуле k – жесткость пружины. Таким образом, по величине деформации пружины x можно измерить действующую на тело силу.

> В природе существуют четыре основных фундаментальных вида взаимодействий: гравитационные, слабые, электромаг-

[1] Свободным называют тело, на которое не действуют другие тела или их действия скомпенсированы.

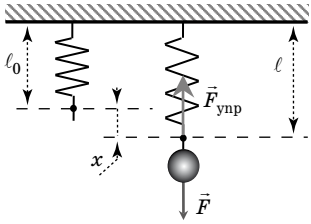


Рис. 6.1. Измерение силы динамометром

нитные и сильные (ядерные). Вне зависимости от своей природы все силы, действующие на тело, векторно складываются в единую равнодействующую силу.

Современная формулировка второго закона Ньютона:

Ускорение тела прямо пропорционально векторной сумме всех приложенных к нему сил и обратно пропорционально массе:

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}_i}{m}. \qquad (6.2)$$

Масса во втором законе выступает в роли коэффициента пропорциональности между равнодействующей всех сил и ускорением. Определение массы через процедуру измерения будет дано после формулировки третьего закона.

Уравнение (6.2) называется *основным уравнением динамики*. Решение этого уравнения является *основной задачей динамики*. Задача имеет две постановки – *прямую* и *обратную*.

В *прямой задаче* требуется по закону движения тела $\vec{r}(t)$ найти закон действующих сил.

В *обратной задаче* по закону действующих сил и по начальным условиям $\vec{r}_0$ и $\vec{\upsilon}_0$ требуется найти закон движения тела $\vec{r}(t)$. На обратной задаче динамики построен *принцип детерминизма*. Поскольку решение обратной задачи существует, можно точно определить положение тела или состояние системы в любой момент времени. Такие расчеты бывают трудоемкими, но выполнимыми. Очень точны прогнозы астрономических явлений.

3. Действие и противодействие

Третий закон Ньютона утверждает, что любое воздействие носит характер взаимодействия, причем силы взаимодействия центральные.

Рис. 6.2. Направление сил взаимодействия:
а – силы притяжения; б – силы отталкивания

Тела взаимодействуют с силами, одинаковыми по величине, противоположными по направлению, лежащими на прямой, соединяющей центры тел.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \qquad (6.3)$$

Возможны как силы притяжения, так и силы отталкивания. В любом случае они направлены в противоположные стороны, как это показано на рис. 6.2.

Из формулы (6.3) следует, что векторная сумма сил F_1 и F_2 равна нулю. Почему же в таком случае эти силы не компенсируют друг друга? Ответ простой – они приложены к разным телам.

Вернемся к определению массы. Для этого рассмотрим два взаимодействующих тела. Считаем, что других сил, кроме сил взаимодействия, нет. Массу первого тела считаем известной. В этом случае:

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2; \qquad m_1 a_1 = m_2 a_2;$$

$$m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2}. \qquad (6.4)$$

Измерив ускорения обоих тел, мы можем сравнить их массы, то есть выразить неизвестную массу m_2 через известную (эталонную) массу m_1. Таким методом определяются массы элементарных частиц и астрономических объектов.

7. Законы движения планет и закон Всемирного тяготения

Законы Кеплера

Иоганн Кеплер на основе данных астронома Тихо Браге и своих собственных наблюдений вывел три закона движения планет и комет Солнечной системы.

1. Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце (рис. 7.1).

Дополнительно отметим, что:

– окружность является частным случаем эллипса с совпадающими фокусами;

– все планеты Солнечной системы двигаются по почти круговым орбитам;

– по эллиптическим орбитам двигаются кометы.

2. За равные промежутки времени радиус-вектор пересекает равные площади эллипса.

Если площади показанных на рис. 7.2 треугольников одинаковы:

$$S_{\Delta 012} = S_{\Delta 034} = S_{\Delta 056},$$

то одинаково и время движения планеты по орбите от точки 1 до точки 2, от точки 3 до точки 4, от точки 5 до точки 6:

$$t_{12} = t_{34} = t_{56}.$$

3. Отношение квадратов периодов обращения планет вокруг Солнца равно отношению кубов больших осей эллипсов:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^3. \qquad (7.1)$$

Форма эллипса при этом значения не имеет. Если величины b_1 и b_2 на рис. 7.3 равны друг другу, то и периоды обращения T_1 и T_2 тоже равны.

Пусть две планеты двигаются по круговым орбитам (рис. 7.4) с радиусами r_1 и r_2. Формулу (7.1) перепишем в виде:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3. \qquad (7.2)$$

На планету, двигающуюся по круговой орбите, действует сила притяжения к Солнцу, которая является центростремительной.

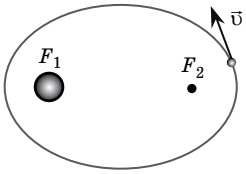


Рис. 7.1. Орбита планеты

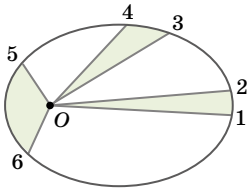


Рис. 7.2. Закон площадей

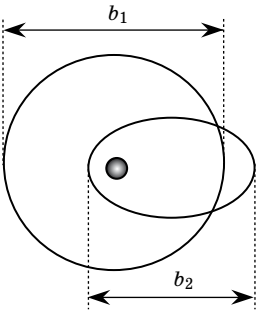


Рис. 7.3. Размеры орбит

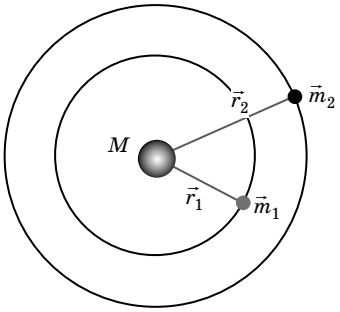


Рис. 7.4. Планеты на круговых орбитах

Значит, отношение сил, действующих на первую и на вторую планеты, равно:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\dfrac{m_1 \upsilon_1^{\,2}}{r_1}}{\dfrac{m_2 \upsilon_2^{\,2}}{r_2}} = \frac{m_1 \upsilon_1^{\,2} r_2}{m_2 \upsilon_2^{\,2} r_1}.$$

Учтем, что скорость планеты υ связана с радиусом орбиты и периодом T обращения (годом) соотношением: $\upsilon = \dfrac{2\pi r}{T}$ и продолжим:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 r_2 \cdot \upsilon_1^{\,2}}{m_2 r_1 \cdot \upsilon_2^{\,2}} = \frac{m_1 r_2}{m_2 r_1} \cdot \frac{4\pi^2 r_1^{\,2}}{T_1^{\,2}} \cdot \frac{T_2^{\,2}}{4\pi^2 r_2^{\,2}} = \frac{m_1 r_1}{m_2 r_2} \cdot \frac{T_2^{\,2}}{T_1^{\,2}}.$$

Далее пользуемся формулой (7.2):

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 r_1}{m_2 r_2} \cdot \frac{T_2^{\,2}}{T_1^{\,2}} = \frac{m_1 r_1}{m_2 r_2} \cdot \frac{r_2^{\,3}}{r_1^{\,3}} = \frac{m_1 r_2^{\,2}}{m_2 r_1^{\,2}} = \frac{m_1}{r_1^{\,2}} \cdot \frac{r_2^{\,2}}{m_2}.$$

Собираем все величины с индексом 1 слева, а с индексом 2 – справа:

$$\frac{F_1 r_1^{\,2}}{m_1} = \frac{F_2 r_2^{\,2}}{m_2}; \;\Rightarrow\; \frac{F r^2}{m} = \text{const}; \;\Rightarrow\; F = \frac{\text{const} \cdot m}{r^2}. \qquad (7.3)$$

По *третьему закону Ньютона* сила, действующая на планету со стороны Солнца, равна силе, действующей на Солнце со стороны планеты. Но в последней формуле тогда будет не масса планеты m,

а масса Солнца M. Таким образом, в числителе формулы (7.3) должно стоять произведение взаимодействующих масс. Оставшуюся часть константы обозначаем буквой G и получаем *закон всемирного тяготения*:

$$F = G\frac{mM}{r^2}, \tag{7.4}$$

где m и M – массы взаимодействующих тел; r – расстояние между их центрами; $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2 – гравитационная постоянная.

Формула (7.4) определяет закон гравитационного взаимодействия между любыми телами. *Гравитационное взаимодействие* – одно из фундаментальных взаимодействий, существующих в природе.

> Масса тела является источником гравитационного поля и объектом, на который это поле действует.

Нужно понимать, что масса в законе всемирного тяготения имеет иной смысл, нежели в законах динамики Ньютона. Ранее через процедуру измерений мы по формуле (6.4) давали определение массы как *меры инертности тела*, или *инертной массы*. В формуле (7.4) масса имеет смысл гравитационного заряда тела. Такая масса называется *гравитационной*. Гравитационная и инертная масса – это разные физические величины. При этом они обычно измеряются в одинаковых единицах. В теории ниоткуда не следует, что они должны быть равны друг другу. Их равенство[1] – это факт, доказанный экспериментально с очень высокой точностью.

> В равенстве инертной и гравитационной массы состоит принцип эквивалентности масс.

8. Закон сохранения импульса

Импульсом тела называется произведение его массы на скорость

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}. \tag{8.1}$$

Импульс – векторная величина, имеющая направление. Продифференцируем его по времени:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm\vec{\upsilon}}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

[1] Строго говоря, не равенство, а пропорциональность.

и получим другую запись *второго закона Ньютона*.

$$d\vec{p} = \sum \vec{F}_i \cdot dt. \tag{8.2}$$

Слева стоит *изменение импульса тела*, справа – *импульс силы*.

> Импульс силы равен изменению импульса тела.
> Импульс тела меняется только в том случае, когда на тело действуют силы.

Пусть имеются два взаимодействующих тела. Других сил, кроме сил взаимодействия, нет. Импульс системы двух тел есть сумма импульсов тел:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \tag{8.3}$$

Продифференцируем это выражение по времени и получим сумму сил, действующих на оба тела, которая по *третьему законуНьютона* равна нулю.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0. \tag{8.4}$$

Получается, что импульс двух взаимодействующих тел сохраняется:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}.$$

Точно также сохраняется импульс системы, состоящей из любого количества взаимодействующих тел, поскольку все взаимодействия разбиваются на парные. Изменить импульс системы могут лишь внешние силы, действующие на тела:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_i^{\text{внеш}}. \tag{8.5}$$

> Если система замкнута и в ней нет внешних сил или все внешние силы компенсируют друг друга, то импульс такой системы сохраняется.

9. Теорема о движении центра масс

Рассмотрим систему материальных точек, показанную на рис. 9.1. Каждая из них имеет массу m_i. Положение каждой материальной точки относительно начала координат задается радиус-вектором $\vec{r}_i$.

Центр масс системы материальных точек задается радиус-вектором:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N};$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum\limits_i m_i\vec{r}_i}{m}. \qquad (9.1)$$

В этой формуле m – масса всей системы, то есть масса всех материальных точек.

Убедимся в том, что это определение центра масс не противоречит нашим интуитивным представлениям. Найдем центр масс двух материальных точек на рис. 9.2.

$x_1 = -2$ м, $x_2 = -6$ м,

$y_1 = 5$ м, $y_2 = 1$ м,

$m_1 = 1$ кг. $m_2 = 3$ кг.

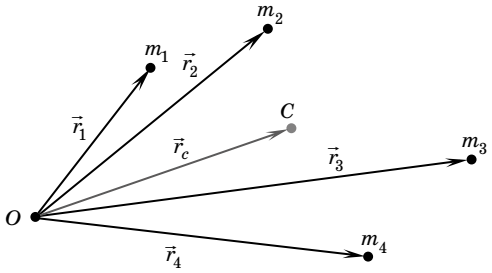


Рис. 9.1. Центр масс системы материальных точек

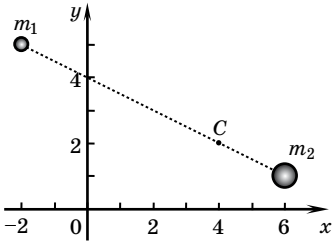


Рис. 9.2. Центр тяжести системы двух материальных точек

Найдем координаты точки C с помощью формулы (9.1):

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{1 \cdot (-2) + 3 \cdot 6}{1 + 3} = 4 \text{ м},$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 1}{1 + 3} = 2 \text{ м}.$$

Центр масс системы двух материальных точек находится на отрезке, соединяющем эти точки, и делит длину этого отрезка в пропорции 1:3. Точка C находится именно там, где мы себе это интуитивно представляли.

Продифференцируем выражение (9.1) по времени и найдем скорость центра масс системы:

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{d\sum m_i \vec{r}_i}{mdt} = \frac{\sum m_i d\vec{r}_i}{mdt} = \frac{\sum m_i \vec{\upsilon}_i}{m} = \frac{\sum \vec{p}_i}{m};$$

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{\sum \vec{p}_i}{m}. \qquad (9.2)$$

Еще раз продифференцируем получившееся выражение по времени и найдем ускорение центра масс системы:

$$\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \frac{d\sum \vec{p}_i}{mdt} = \frac{\sum d\vec{p}_i}{mdt} = \frac{\sum \vec{F}_i}{m};$$

$$\vec{a}_c = \frac{\sum \vec{F}_i}{m}. \qquad (9.3)$$

Центр масс системы тел движется так, как двигалась бы материальная точка, имеющая массу всей системы, если бы к ней были приложены все силы, действующие на разные тела системы.

В этом и состоит теорема о движении центра масс.

На рис. 9.3 показан полет швабры с вращением. Во время этого полета центр масс швабры движется по параболе, как и двигалась бы материальная точка, если бы ее бросили с той же начальной скоростью в том же направлении.

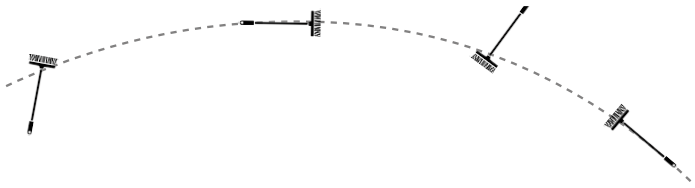


Рис. 9.3. Полет тела сложной формы с вращением

10. Момент импульса и момент силы

Моментом импульса материальной точки относительно начала координат называют векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ на импульс $\vec{p}$ точки.

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] \tag{10.1}$$

$$L = m\upsilon r \cdot \sin\alpha, \tag{10.2}$$

где m – масса материальной точки; υ – ее скорость; α – угол между направлением радиус-вектора и скорости.

На рис. 10.1 показано, что вектор момента импульса $\vec{L}$ направлен перпендикулярно направлениям радиус-вектора $\vec{r}$ и импульса $\vec{p}$, то есть перпендикулярно плоскости угла α. Величина момента импульса численно равна площади параллелограмма, образованного векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$.

Пример 10.1. Момент импульса материальной точки массой m, двигающейся с постоянной скоростью υ по окружности радиусом R.

При движении по окружности вектор L направлен вдоль оси вращения, проходящей через центр окружности O, как это показано на рис. 10.2. Угол α между направлением скорости материальной точки и радиусом окружности прямой. Формула (10.2) переписывается в виде:

$$L = m\upsilon R. \tag{10.3}$$

Очевидно, что момент импульса в этом случае остается постоянным и по направлению, и по величине.

Пример 10.2. Момент импульса материальной точки массой m, двигающейся с постоянной скоростью υ вдоль прямой.

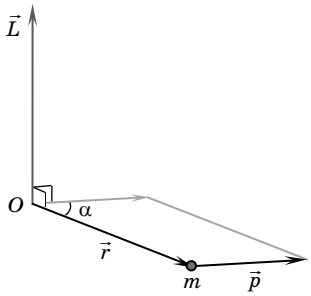


Рис. 10.1. Момент импульса материальной точки

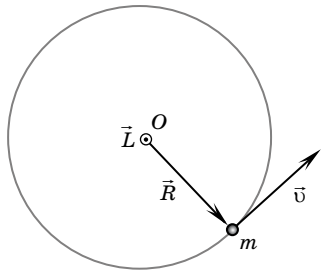


Рис. 10.2. Материальная точка, двигающаяся по окружности

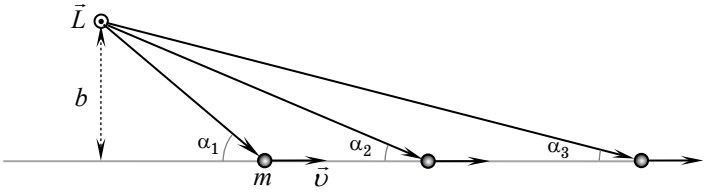


Рис. 10.3. Материальная точка, двигающаяся вдоль прямой

При движении вдоль прямой вектор L остается перпендикулярным плоскости рис. 10.3.

Из этого рисунка видно, что $r_1 \cdot \sin\alpha_1 = r_2 \cdot \sin\alpha_2 = r_3 \cdot \sin\alpha_3 = b$:

$$L = m\upsilon b. \tag{10.4}$$

Очевидно, что момент импульса в случае равномерного движения вдоль прямой остается постоянным и по направлению, и по величине.

Пример 10.3. Момент импульса планеты, двигающейся вокруг Солнца по эллиптической орбите.

При движении по эллиптической орбите вектор L остается перпендикулярным плоскости орбиты и плоскости рис. 10.4, поэтому нужно найти только его величину.

$$L = rp\sin\alpha = mr \cdot \upsilon\sin\alpha = mr\upsilon_\perp.$$

Из формулы (3.2) следует, что $\upsilon_\perp = \omega r$, где ω – мгновенная угловая скорость вращения планеты вокруг Солнца. Таким образом:

$$L = mr^2\omega. \tag{10.5}$$

Вернемся к понятию секториальной скорости, о которой уже шла речь во *втором законе Кеплера*.

Площадь треугольника ABC на рис. 10.5, *а* можно найти по формуле:

$$\Delta S_{ABC} = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin\Delta\alpha.$$

При очень малом угле $\Delta\alpha$ на рис. 10.5, *б* $dS = \dfrac{r^2 d\alpha}{2}$.

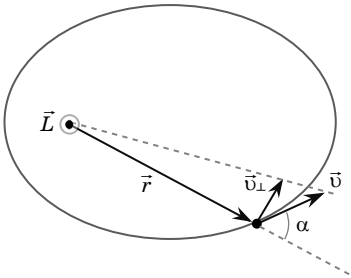


Рис. 10.4. Планета, двигающаяся по эллиптической орбите

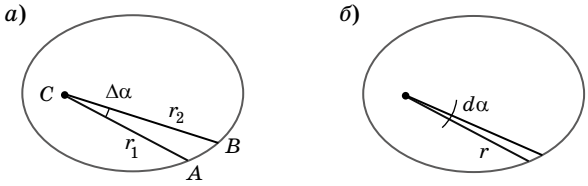


Рис. 10.5. Определение секториальной скорости

Секториальной скоростью называется производная площади по углу $\sigma = \dfrac{dS}{d\alpha}$;

$$\sigma = \frac{r^2\omega}{2}. \qquad (10.6)$$

Сравнивая формулы (10.5) и (10.6), выражаем момент импульса планеты через ее секториальную скорость:

$$L = 2m\sigma. \qquad (10.7)$$

Поскольку секториальная скорость планеты по *второму закону Кеплера* сохраняется, сохраняется и момент импульса планеты при ее движении по эллиптической орбите.

Моментом силы относительно начала координат называют векторное произведение радиус-вектора на вектор силы:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]. \qquad (10.8)$$

Вектор момента силы имеет направление, перпендикулярное векторам $\vec{r}$ и $\vec{F}$, как это показано на рис. 10.6.

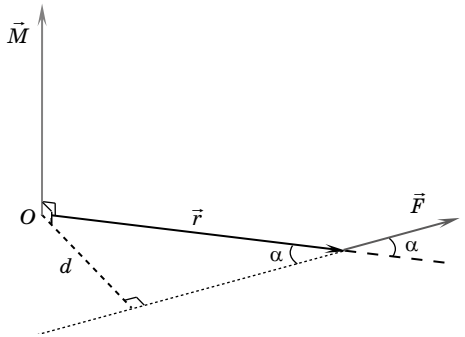


Рис. 10.6. Момент силы

Величина момента силы определяется выражением:

$$M = Fr \cdot \sin\alpha.$$

Как видно из рис. 10.6, произведение $r \cdot \sin\alpha$ есть кратчайшее расстояниеот точки O до линии приложения силы. Назовем его *плечом силы*, обозначим буквой d и перепишем последнюю формулу:

$$M = Fd. \qquad (10.9)$$

Обычно вектор момента силы направлен вдоль оси вращения в соответствии с *правилом буравчика* (см. рис. 10.7). В общем случае моментом силы относительно оси называют проекцию вектора момента на эту ось. Отметим, что момент силы не всегда вызывает вращение. Иногда вращение невозможно.

Парой сил называются две силы, одинаковые по величине и противоположные по направлению $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Эти силы в общем случае не лежат на одной прямой.

Моментом пары сил называется сумма двух моментов этих сил. Найдем момент пары сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, показанных на рис. 10.8:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \left[\vec{r}_1\vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_2\vec{F}_2\right] = \left[\vec{r}_1\vec{F}_1\right] + \left[\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_{12}\right)\vec{F}_2\right] =$$
$$= \left[\vec{r}_1\vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_1\vec{F}_2\right] + \left[\vec{r}_{12}\vec{F}_2\right] = \left[\vec{r}_1\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)\right] + \left[\vec{r}_{12}\vec{F}_2\right] = \left[\vec{r}_{12}\vec{F}_2\right];$$

$$\vec{M} = \left[\vec{r}_{12}\vec{F}_2\right]. \qquad (10.10)$$

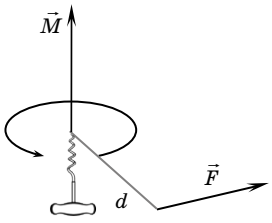


Рис. 10.7. Связь направления вектора момента с направлением вращения

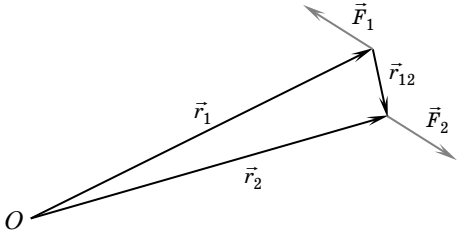


Рис. 10.8. Момент пары сил

Выводы:

1. Момент пары сил не зависит от выбора начала отсчета.

2. Если $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ – силы взаимодействия, лежащие на одной прямой друг с другом и с вектором $\vec{r}_{12}$, то момент пары таких сил равен нулю.

11. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса

Продифференцируем выражение (10.1) по времени по правилу дифференцирования произведения:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d\left[\vec{r}\,\vec{p}\right]}{dt}=\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}\right]+\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{p}}{dt}\right]=\left[\vec{\upsilon}\vec{p}\right]+\left[\vec{r}\sum\vec{F}_i\right].$$

Учитывая, что $\vec{\upsilon}\uparrow\uparrow\vec{p},\Rightarrow\left[\vec{\upsilon}\,\vec{p}\right]=0$, а второе слагаемое $\left[\vec{r}\sum\vec{F}_i\right]=\sum\vec{M}_i$, получаем *уравнение моментов*:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum\vec{M}_i. \qquad (11.1)$$

> Производная от момента импульса тела по времени есть сумма моментов всех сил, приложенных к телу.

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек. Момент импульса этой системы складывается из моментов импульса ее элементов:

$$\vec{L}=\vec{L}_1+\vec{L}_2+\vec{L}_3+\ldots+\vec{L}_N=\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i. \qquad (11.2)$$

Возьмем производную по времени от этого выражения:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\sum \vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i. \qquad (11.3)$$

Последняя сумма в формуле (11.3) состоит из моментов сил взаимодействия и моментов внешних сил. Силы взаимодействия разбиваются на *пары*, о которых шла речь во втором следствии из формулы (10.7). Момент каждой такой пары сил равен нулю. Сумма моментов всех сил взаимодействия при этом тоже равна нулю. Остается только сумма моментов внешних сил:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{внеш}}. \qquad (11.4)$$

Если система замкнута и в ней отсутствуют внешние силы или они скомпенсированы, то момент импульса такой системы сохраняется.

> Момент импульса замкнутой системы тел сохраняется.

12. Работа, мощность и кинетическая энергия

Механической работой постоянной силы $\vec{F}$ по перемещению $\vec{S}_{12}$ тела из точки 1 в точку 2 называется скалярное произведение векторов силы и перемещения.

$$A_{12} = \left(\vec{F}\vec{S}_{12}\right) \qquad (12.1)$$

Эту формулу можно переписать иначе, как в школьном курсе физики:

$$A_{12} = FS_{12}\cos\alpha. \qquad (12.2)$$

Если траектория движения тела криволинейная, но сила при этом остается постоянной по величине и по направлению[1], как это показано нарис. 12.2, то написанные формулы остаются справедливыми.

[1] Такая сила называется однородной.

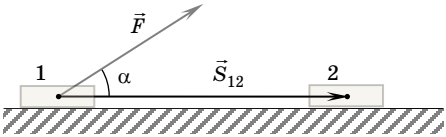


Рис. 12.1. Работа постоянной силы

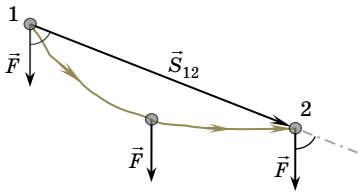


Рис. 12.2. Работа постоянной силы на криволинейной траектории

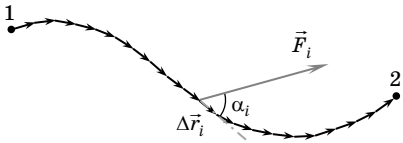


Рис. 12.3. Разбиение траектории на малые элементы

Если во время движения меняется величина или направление силы, то траекторию следует разбить на очень малые участки $\Delta\vec{r}_i$, в пределах каждого из которых силу $\vec{F}_i$ можно считать постоянной. Постоянным можно также считать угол α_i между направлениями силы и перемещения на участкес номером i (см. рис. 12.3). Работа силы ΔA_i на таком участке вычисляется как:

$$\Delta A_i = \left(\vec{F}_i \Delta\vec{r}_i\right) = F_i \Delta r_i \cos\alpha_i . \qquad (12.3)$$

Работа переменной силы на пути из точки 1 в точку 2 есть сумма элементарных работ, совершенных вдоль траектории:

$$A_{12} = \sum \Delta A_i = \sum \left(\vec{F}_i \Delta\vec{r}_i\right).$$

Если количество элементов траектории устремить к бесконечности при условии, что длина каждого из них стремится к нулю, то мы перейдем от конечных приращений к дифференциалам и от конечной суммы к *контурному интегралу*, в котором пределы (1) и (2)

символически обозначают начальную и конечную точки, интегрирование ведется вдоль всей траектории:

$$A_{12} = \int\limits_{(1)}^{(2)} \left(\vec{F} d\vec{r}\right). \qquad (12.4)$$

Механической мощностью называется работа, совершенная силой в единицу времени:

$$N = \frac{A}{t}\cdot \qquad (12.5)$$

Формула (12.5) задает среднюю мощность. При определении мгновенной мощности нужно элементарную работу силы поделить на бесконечно малый промежуток времени, в течение которого она совершается:

$$N = \frac{\left(\vec{F} d\vec{r}\right)}{dt} = \left(\vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \left(\vec{F}\vec{\upsilon}\right);$$

$$N = \left(\vec{F}\vec{\upsilon}\right)\cdot \qquad (12.6)$$

Запишем элементарную работу равнодействующей всех сил, приложенных к телу на участке траектории $d\vec{r}$:

$$dA = \left(\vec{F} d\vec{r}\right) = m\left(\vec{a} d\vec{r}\right) = m\left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} d\vec{r}\right) = m\left(\frac{d\vec{\upsilon} d\vec{r}}{dt}\right) = m\left(d\vec{\upsilon}\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = m\left(d\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}\right) = \ldots$$

Прежде чем продолжить равенство, докажем математическое утверждение.

Сведения из математики

$$\left(\vec{b}\vec{b}\right) = b^2; \quad d\left(\vec{b}\vec{b}\right) = \left(\vec{b}\cdot d\vec{b}\right) + \left(d\vec{b}\cdot\vec{b}\right) = 2\left(\vec{b}\cdot d\vec{b}\right); \quad d\left(b^2\right) = 2b\cdot db; \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{b}\cdot d\vec{b}\right) = b\cdot db. \qquad (12.7)$$

Итак, мы доказали, что $\left(\vec{\upsilon} d\vec{\upsilon}\right) = \upsilon d\upsilon$. Продолжим вывод формулы:

$$\ldots = m\upsilon d\upsilon = \frac{1}{2} m d\upsilon^2 = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right).$$

Интегрируем полученное выражение вдоль траектории от точки 1 до точки 2:

$$A_{12} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = E_{K2} - E_{K1}. \qquad (12.8)$$

В последней формуле введено понятие *кинетической энергии*[1]:

$$E_K = \frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (12.9)$$

Там же получена связь работы всех сил с изменением кинетической энергии:

$$A_{12}^{\text{всех}} = E_{K2} - E_{K1}. \qquad (12.10)$$

В заключение отметим, что кинетическая энергия – это энергия движения. Она зависит только от скорости тела и не зависит от его положения и от сил, действующих на тело.

13. Потенциальные и непотенциальные силы

Потенциальная энергия – существенно более сложное понятие, чем кинетическая. Для нее нет единой формулы, для каждой силы потенциальная энергия записывается по-своему, для некоторых сил такого понятия вообще не существует. Итак, все по порядку. Сначала все силы разобьем на два класса: потенциальных и непотенциальных.

Потенциальными называются такие силы, работа которых не зависит от траектории, а зависит лишь от начального и конечного положения тела.

Из определения потенциальных сил вытекает, что работа потенциальной силы на замкнутой траектории равна нулю. Докажем это:

Рассмотрим элементарный отрезок траектории, вдоль которого одна и та же сила совершает перемещение сначала в прямом $d\vec{r}_1$, а затем в обратном $d\vec{r}_2$, направлениях, как это показано на рис. 13.1.

$$dA_1 = \left(\vec{F}_1 d\vec{r}_1\right); \qquad dA_2 = \left(\vec{F}_2 d\vec{r}_2\right);$$
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2; \quad d\vec{r}_2 = -d\vec{r}_1; \quad \Rightarrow \quad dA_2 = -dA_1.$$

Интегрируя полученное равенство по всей траектории, приходим к выводу: работы потенциальной силы вдоль одной и той же траек-

[1] Вообще говоря, из уравнения (12.8) следует, что кинетическая энергия может иметь постоянную составляющую. Однако ее всегда полагают равной нулю.

Рис. 13.1. Элементарная работа потенциальной силы

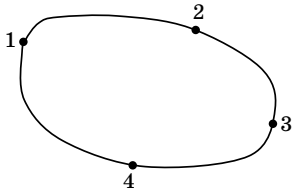


Рис. 13.2. Работа потенциальных сил на замкнутой траектории

тории, совершенные при движении в противоположных направлениях, равны по модулю, но имеют разный знак. Значит, на рис. 13.2 $A_{341} = -A_{143}$.

Силы на рис. 13.2 потенциальны, следовательно, $A_{123} = A_{143}$.

Найдем работу по замкнутой траектории A_{12341}:

$$A_{12341} = A_{123} + A_{341} = A_{123} - A_{143} = 0$$

$$A_{12341} = 0.$$

Потенциальные силы зависят лишь от положения тела, но не зависят от «истории» и от скорости тела. Потенциальными всегда являются:

1. *Однородные силы*, то есть силы постоянные в рассматриваемой области:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \text{const}. \qquad (13.1)$$

Доказательство:

Рассмотрим однородную силу $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F} = const$, под действием которой тело переместилось из точки 1 в точку 2 (рис. 13.3):

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \left(\vec{F} d\vec{r}\right) = \left(\vec{F} \int_{(1)}^{(2)} d\vec{r}\right) = \left(\vec{F}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)\right) = \left(\vec{F}\,\vec{r}_{12}\right) = Fr_{12}\cos\alpha = Fd.$$

Работа однородной силы не зависит от траектории, значит, однородная сила потенциальна.

2. *Центральные силы*, то есть зависящие только от расстояния до силового центра и всегда направленные на него или от него:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \pm F(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \qquad (13.2)$$

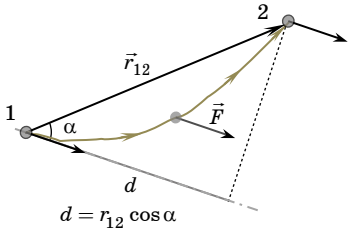


Рис. 13.3. Работа однородной силы

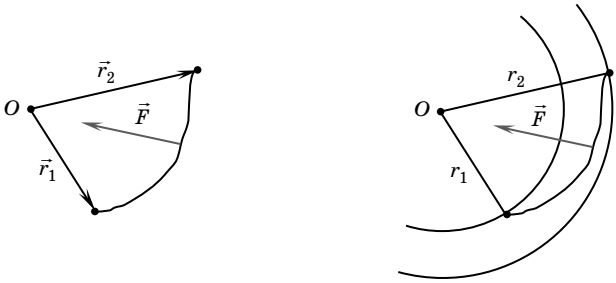


Рис. 13.4. Работа центральной силы

В этой формуле знак «+» отвечает силам отталкивания, «–» – силам притяжения. Докажем, что центральные силы являются потенциальными. Найдем работу центральной силы (рис. 13.4) по перемещению тела из точки $\vec{r}_1$ в точку $\vec{r}_2$. Для определенности считаем ее силой притяжения.

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\vec{F} d\vec{r}\right) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F(r) \frac{\left(\vec{r} d\vec{r}\right)}{r} = \ldots$$

Согласно доказанному ранее тождеству (12.7) скалярное произведение векторов можно заменить произведением длин этих векторов $\left(\vec{r} d\vec{r}\right) = r dr$.

Эта замена касается не только функции, стоящей под интегралом, но и пределов интегрирования. Радиус-вектор $\vec{r}$ заменяется радиусом окружности *r*.

$$\ldots = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F(r) \frac{r dr}{r} = -\int_{r_1}^{r_2} F(r) dr.$$

Получился обыкновенный интеграл Римана от функции с одной переменной. Этот интеграл согласно формуле Ньютона – Лейбница равен разности первообразных на верхнем и на нижнем пределах. Сказанное означает, что работа центральной силы притяжения не зависит от формы траектории, а лишь от начального и конечного расстояния до силового центра и закона действующей силы. Этот вывод в равной мере касается и сил отталкивания: для них в полученной формуле не будет минуса.

Мы доказали, что центральные силы всегда потенциальны.

3. *Любая комбинация однородных и центральных сил* тоже является потенциальной, хотя она может быть и неоднородной, и нецентральной.

Непотенциальными всегда являются:

– сила тяги мотора;

– сила трения или сила сопротивления;

– сила, приложенная разумно. Силы тяги и силы трения (сопротивления) зависят от направления скорости[1]:

$$\vec{F} = \pm F \cdot \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}. \tag{13.3}$$

Сила тяги может ускорять тело. В этом случае в формуле (13.3) стоит знак «+». Она же может и тормозить тело. Тогда в формуле (13.3) знак «–». Сила трения или сопротивления всегда тормозит тело; в формуле (13.3) – знак «–». Докажем, что сила (13.3) всегда непотенциальна. Для определенности положим, что в ней знак «+». Элементарная работа этой силы равна:

$$dA = \left(\vec{F} d\vec{r}\right) = \frac{F}{\upsilon}\left(\vec{\upsilon} d\vec{r}\right) = \frac{F}{\upsilon}\left(\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}\right) dt = \frac{F\upsilon^2}{\upsilon} dt = F\upsilon dt.$$

В этой формуле стоит произведение модуля силы на модуль скорости и на промежуток времени. Это произведение неотрицательно на любом участке траектории. Работа по всей траектории есть интеграл, то есть бесконечная сумма элементарных работ. Каждое слагаемое такой суммы неотрицательно, а в целом эта сумма положительна, поскольку сразу все элементарные работы не могут одновременно равняться нулю (лишь в случае, когда F – тождественный ноль). Значит, работа выбранной силы на любой траектории, в том

[1] Строго говоря, сила тяги не всегда направлена вдоль скорости, но она всегда имеет ненулевую проекцию на направление скорости. Это ничего принципиально не меняет в дальнейших рассуждениях.

числе замкнутой, положительна. Работа на замкнутой траектории не равна нулю. Сила непотенциальна.

В случаях когда в формуле (13.3) знак «−», работа на замкнутой траектории окажется отрицательной, то есть тоже ненулевой.

В системе тел существуют *внутренние и внешние силы*. Внутренние силы, то есть силы взаимодействия, по *третьему закону Ньютона* обязательно центральные, а, значит, потенциальные. Непотенциальные силы – это всегда *внешние силы*. Обычно этот термин на практике обозначает именно непотенциальные силы.

Кроме потенциальных и непотенциальных существует еще один класс сил – *силы, не совершающие работу*. К ним относятся сила реакции неподвижной опоры, сила Лоренца и сила Кориолиса, о которой речь пойдет позже. Перемещение происходит перпендикулярно направлению действия этих сил, поэтому работа не совершается.

14. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии

Перейдем к определению *потенциальной энергии*. Будем считать, что на тело действуют только потенциальные силы. Сначала нужно выбрать точку O, в которой потенциальная энергия равна нулю (рис. 14.1). Этот выбор может быть как осмысленным, так и совершенно произвольным.

Потенциальной энергией тела в точке 1 называется работа потенциальных сил по перемещению тела из точки 1 в точку 0:

$$E_{П1} = A_{10} \qquad (14.1)$$

Поскольку силы потенциальные, работу можно совершать вдоль любой траектории между выбранными точками 1 и 0. Поэтому потенциальная энергия по формуле (14.1) определяется однозначно.

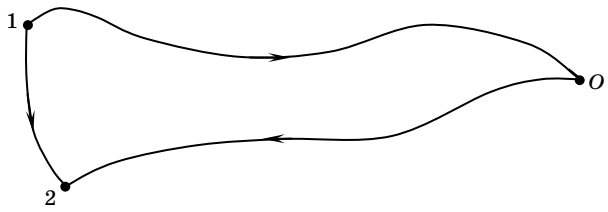


Рис. 14.1. Определение потенциальной энергии

Найдем работу потенциальных сил по перемещению тела из точки 1 в точку 2. Эту работу можно совершать вдоль любой траектории. Выберем из них ту, которая проходит через точку O:

$$A_{12} = A_{102} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20} = E_{\text{П}1} - E_{\text{П}2}.$$

Работа потенциальных сил равна обратной разности потенциальных энергий:

$$A_{12}^{\text{пот}} = E_{\text{П}1} - E_{\text{П}2}. \qquad (14.2)$$

Сравним формулы (12.10) и (14.2). Если в системе действуют только потенциальные силы, то левые части у них будут одинаковыми, значит:

$$E_{\text{К}2} - E_{\text{К}1} = E_{\text{П}1} - E_{\text{П}2}, \quad \Rightarrow \quad E_{\text{К}2} + E_{\text{П}2} = E_{\text{К}1} + E_{\text{П}1}.$$

Сумма кинетической и потенциальной энергии, которая называется *механической энергией*, остается постоянной:

$$E = E_{\text{К}} + E_{\text{П}}. \qquad (14.3)$$

Если рассмотреть систему тел и допустить существование непотенциальных сил, то левые части формулы (12.10) и (14.2) не будут равны:

$$A_{12}^{\text{всех}} - A_{12}^{\text{пот}} = \left(E_{\text{К}2} - E_{\text{К}1}\right) - \left(E_{\text{П}1} - E_{\text{П}2}\right) = \left(E_{\text{К}2} + E_{\text{П}2}\right) - \left(E_{\text{К}1} + E_{\text{П}1}\right).$$

Их разность будет равна работе непотенциальных сил:

$$A_{12}^{\text{непот}} = E_2 - E_1 \qquad (14.4)$$

Уже отмечалось, что все внутренние силы – силы взаимодействия обязательно центральные, то есть потенциальные. Все непотенциальные силы обязательно внешние; работа непотенциальных сил – это работа внешних сил:

$$A_{12}^{\text{внеш}} = E_2 - E_1 \qquad (14.5)$$

> Если система замкнута и в ней нет внешних сил или внешние силы скомпенсированы, то механическая энергия такой системы сохраняется.

15. Примеры вычисления потенциальной энергии

Пример 15.1. Потенциальная энергия в однородном поле силы тяжести $m\vec{g}$.

Тело переместилось из точки 1 в точку 0 на рис. 15.1. Будем считать потенциальную энергию в точке 0 равной нулю. Сила тяжести $m\vec{g}$ совершила при этом перемещении работу, равную потенциальной энергии в точке 1:

$$E_{П1} = A_{10} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \left(m\vec{g}d\vec{r}\right).$$

Поскольку сила тяжести постоянна, ее можно вынести из-под интеграла:

$$E_{П1} = A_{10} = \left(m\vec{g}\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} d\vec{r}\right). \qquad (15.1)$$

Написанный интеграл равен вектору, проведенному из точки 1 в точку 0:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} d\vec{r} = \vec{r}\Big|_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{10}.$$

Подставляем этот результат в формулу (15.1) и продолжаем:

$$E_{П1} = m\left(\vec{g}\cdot\vec{r}_{10}\right) = mgr_{10}\cdot\cos\alpha.$$

Проекция перемещения на вертикальное направление $r_{10}\cdot\cos\alpha$ равна высоте точки 1 относительно точки 0:

$$r_{10}\cdot\cos\alpha = h.$$

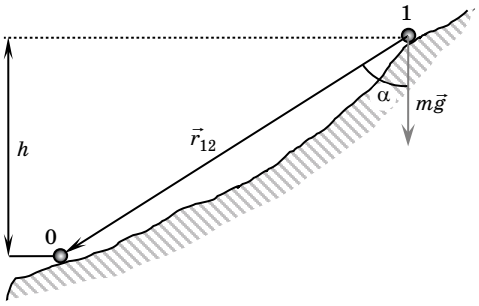


Рис. 15.1. Работа силы тяжести при перемещении тела по склону

Таким образом, потенциальная энергия в однородном поле силы $m\vec{g}$ равна:

$$E_{\Pi} = mgh. \qquad (15.2)$$

Пример 15.2. Потенциальная энергия в поле силы всемирного тяготения.

Сила всемирного тяготения, показанная на рис. 15.2, действующая на тело массой m со стороны тела массой M, равна:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}.$$

В этой формуле G – гравитационная постоянная; r – расстояние между взаимодействующими телами; $\vec{r}$ – вектор, проведенный из центра тела M в центр тела m. Выберем ноль потенциальной энергии (точка O) на бесконечном расстоянии между взаимодействующими телами.

Потенциальная энергия взаимодействия тел в точке 1 равна работе силы всемирного тяготения на пути из точки 1 в точку 0:

$$E_{\Pi 1} = A_{10} = \int\limits_{(1)}^{(0)} \left(\vec{F}d\vec{r}\right) = \int\limits_{(1)}^{(0)} -G\frac{mM}{r^2}\frac{\left(\vec{r}d\vec{r}\right)}{r}.$$

Учтем, что $\left(\vec{r}d\vec{r}\right) = rdr$, и продолжим:

$$E_{\Pi 1} = -GmM\int\limits_{(1)}^{(0)}\frac{1}{r^2}\frac{rdr}{r} = -GmM\int\limits_{r_1}^{\infty}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= +GmM\frac{1}{r}\Bigg|_{r_1}^{\infty} = \frac{GmM}{\infty} - \frac{GmM}{r_1} = -\frac{GmM}{r_1}.$$

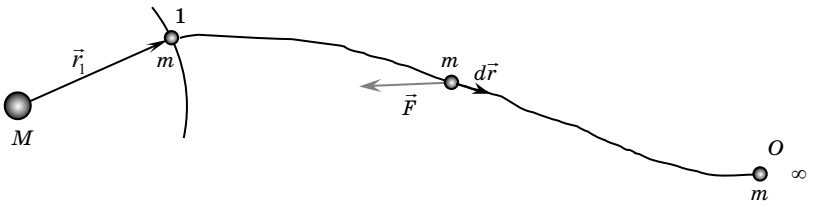


Рис. 15.2. Потенциальная энергия силы всемирного тяготения

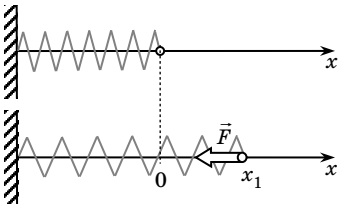


Рис. 15.3. Потенциальная энергия пружины

Мы получили формулу потенциальной энергии силы всемирного тяготения:

$$E_{\text{П}} = -\frac{GmM}{r}. \qquad (15.3)$$

Пример 15.3. Потенциальная энергия силы упругости пружины (рис. 15.3).

При деформировании пружины на величину x возникает сила, направленная к положению равновесия. Проекция этой силы на ось (ox) равна:

$$F_x = -kx.$$

В этой формуле k – жесткость пружины; x – ее деформация.

Выберем ноль потенциальной энергии в положении $x = 0$, когда пружина не деформирована. В таком случае потенциальная энергия пружины в точке 1 равна работе силы упругости при перемещении из точки 1 в точку 0:

$$E_{\text{П1}} = \int_{x_1}^{0} F_x\,dx = \int_{x_1}^{0} -kx\,dx = -k\int_{x_1}^{0} x\,dx = -\frac{kx^2}{2}\Bigg|_{x_1}^{0} = -\frac{k0^2}{2} + \frac{kx_1{}^2}{2} = \frac{kx_1{}^2}{2};$$

$$E_{\text{П}} = \frac{kx^2}{2}. \qquad (15.4)$$

16. Движение тел в гравитационном поле

При движении планеты с массой m вокруг Солнца с массой M сохраняется момент импульса и полная механическая энергия. Сначала воспользуемся законом сохранения момента импульса и свяжем скорости υ_1 и υ_2 в двух крайних точках эллиптической орбиты, как это показано на рис. 16.1.

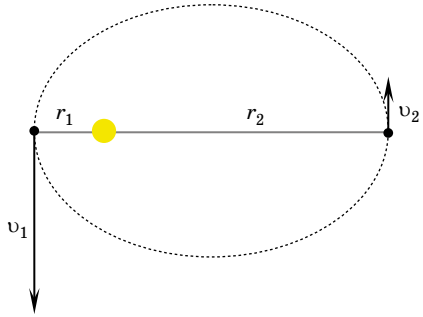


Рис. 16.1. Связь скоростей планеты в крайних точках эллиптической орбиты

Из закона сохранения момента импульса следует, что:

$$m\upsilon_1 r_1 = m\upsilon_2 r_2;$$

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{r_2}{r_1}. \qquad (16.1)$$

Полная механическая энергия E планеты складывается из кинетической (12.9) и потенциальной (15.3):

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} - G\frac{Mm}{r}.$$

Выразим кинетическую энергию через полную и потенциальную:

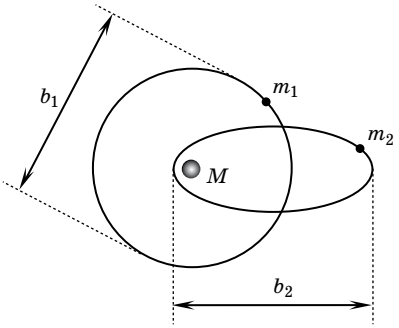
$$\frac{m\upsilon^2}{2} = E + G\frac{Mm}{r}. \qquad (16.2)$$

Поделим кинетическую энергию планеты в первой точке траектории на рис. 16.1 на кинетическую энергию во второй точке. При этом сразу же сократим массу планеты m и двойку в знаменателе:

$$\frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2^2} = \frac{E + GMm/r_1}{E + GMm/r_2}.$$

Воспользуемся формулой (16.1) и раскроем пропорцию:

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{E + GMm/r_1}{E + GMm/r_2}; \qquad Er_2^2 + GMmr_2 = Er_1^2 + GMmr_1.$$



$$E = -\frac{GMm}{b};$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= b_2 \\ m_1 &= m_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_1 = E_2.$$

Рис. 16.2. Одинаковые энергии спутника на различных орбитах

Соберем все члены, содержащие полную энергию в левой части равенства, а все остальные – в правой.

$$E\left(r_2^2 - r_1^2\right) = GMm\left(r_1 - r_2\right); \qquad E\left(r_2 - r_1\right)\left(r_1 + r_2\right) = -GMm\left(r_2 - r_1\right).$$

Сокращаем на $r_2 - r_1$ и получаем выражение для полной механической энергии планеты в поле тяготения Солнца:

$$E = -\frac{GMm}{r_1 + r_2}. \tag{16.2}$$

Отметим, что полная механическая энергия на замкнутой траектории не зависит от формы эллипса, а лишь от длины его большой оси. Энергии двух спутников с одинаковыми массами на рис. 16.2 равны.

В случае движения тела по замкнутой орбите его полная механическая энергия отрицательна.

Полная механическая энергия равна нулю, если тело улетает на бесконечность и там останавливается. Траекторией движения в этом случае является парабола, в фокусе которой находится Солнце.

Полная энергия тела положительна в случае, когда оно просто пролетает мимо Солнца и никогда не вернется. Траектория в этом случае – гипербола.

17. Первая и вторая космические скорости

Рассмотрим движение спутника с массой m вокруг Земли с массой M по круговой орбите с радиусом r. На спутник действует

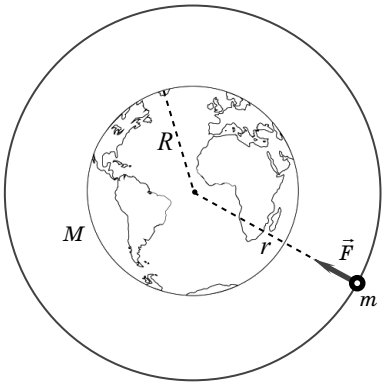


Рис. 17.1. Сила, действующая на спутник на круговой орбите

сила притяжения к Земле, создающая нормальное ускорение (см. рис. 17.1).

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{m\upsilon^2}{r} \\ F &= G\frac{Mm}{r^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{m\upsilon^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}; \quad \upsilon^2 = \frac{GM}{r}.$$

Скорость спутника на круговой орбите равна:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \tag{17.1}$$

Вычисления можно упростить, если учесть, что сила всемирного тяготения, действующая на поверхности Земли, равна mg:

$$mg = \frac{GMm}{R^2} \quad \Rightarrow$$

$$GM = gR^2; \tag{17.2}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{gR^2}{r}}. \tag{17.3}$$

В этой формуле g – ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли.

Первой космической называется скорость спутника на круговой орбите вблизи поверхности Земли, то есть при $r = R$:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}; \tag{17.4}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{gR}. \tag{17.5}$$

Вычисление по формуле (17.5) дает значение $\upsilon_1 = 7{,}91$ км/с.

Второй космической называется минимальная скорость, имея которую тело удалится от поверхности Земли на бесконечное расстояние. В этом случае полная энергия тела равна нулю, то есть потенциальная энергия по модулю равна кинетической:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{GMm}{r};$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}; \tag{17.6}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gR}; \tag{17.7}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2}\,\upsilon_1. \tag{17.8}$$

Вычисление по этим формулам дает значение $\upsilon_2 = 11{,}2$ км/с.

> Первая космическая скорость обязательно должна быть направлена по касательной к поверхности Земли.
> Вторая космическая скорость может иметь любое направление.

18. Связь силы и потенциальной энергии

Пусть некоторая потенциальная сила совершает элементарную работу:

$$dA = \left(\vec{F}d\vec{r}\right).$$

Вспомним, как записывается скалярное произведение векторов через их проекции на координатные оси:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

и закончим: $dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$ (18.1)

Работа потенциальной силы равна изменению потенциальной энергии с обратным знаком:

$$A_{12} = E_{П1} - E_{П2} \text{ или } A_{12} = -\Delta E_{П}.$$

В дифференциальной форме то же самое формулируется равенством:

$$dA = -dE_{П}.$$

Потенциальная энергия – это энергия положения. Она может зависеть только от координат тела – x, y, z. Поэтому дифференциал потенциальной энергии $dE_{П}$ должен выражаться через дифференциалы независимых переменных – через dx, dy, dz:

$$dE_{П} = \frac{\partial E_{П}}{\partial x}dx + \frac{\partial E_{П}}{\partial y}dy + \frac{\partial E_{П}}{\partial z}dz. \qquad (18.2)$$

В этой формуле дроби – частные производные функции по ее переменным.

Сведения из математики

Частной производной функции нескольких переменных по одной из них называется производная, взятая при условии, что остальные переменные при этом являются константами.

Приравняем правые части (18.1) и (18.2) с учетом знака минус:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial E_{П}}{\partial x}dx - \frac{\partial E_{П}}{\partial y}dy - \frac{\partial E_{П}}{\partial z}dz. \qquad (18.3)$$

Еще раз отметим, что переменные x, y, z независимые, значит, в этом выражении можно положить $dy = 0$ и $dz = 0$. Таким образом, получаем:

$$F_x dx = -\frac{\partial E_{П}}{\partial x}dx, \text{ то есть } F_x = -\frac{\partial E_{П}}{\partial x}.$$

Аналогично и для других компонент вектора силы:

$$F_y = -\frac{\partial E_{П}}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_{П}}{\partial z}.$$

Объединим полученные результаты в одну векторную формулу для силы:

$$\vec{F} = \vec{i}\, F_x + \vec{j}\, F_y + \vec{k}\, F_z;$$

$$\vec{F} = -\vec{i}\,\frac{\partial E_{\text{П}}}{\partial x} - \vec{j}\,\frac{\partial E_{\text{П}}}{\partial y} - \vec{k}\,\frac{\partial E_{\text{П}}}{\partial z}.$$

В ней можно вынести за скобки знак минус и потенциальную энергию:

$$\vec{F} = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)E_{\text{П}}. \qquad (18.4)$$

В скобках формулы (18.4) стоит очень интересный объект. У него вместо компонент вдоль координатных осей откладываются математические операции – операции дифференцирования по соответствующей координате. В математике такой вектор обозначается придуманной несуществующей буквой «набла» ∇.

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z};$$

$$\vec{F} = -\nabla E_{\text{П}}.$$

Умножение вектора набла – ∇ на скалярную функцию превращает ее в вектор. Такая операция в математике и в физике называется *градиентом*:

$$\vec{F} = -grad\, E_{\text{П}}. \qquad (18.5)$$

Градиент скалярной величины имеет направление, в котором эта величина быстрее всего возрастает. Величина градиента равна скорости возрастания скалярной величины в этом направлении – ℓ:

$$grad\, E_{\text{П}} = \frac{\partial E_{\text{П}}}{\partial \ell}.$$

Поскольку в формуле (18.5) стоит знак минус, сила имеет направление, в котором потенциальная энергия быстрее всего убывает.

19. Связь законов сохранения с симметрией пространства и времени

Важнейшими законами сохранения в механике, справедливыми для любых изолированных систем, являются законы сохранения импульса, момента импульса и механической энергии.

Любая физическая система может быть подвергнута каким-либо операциям или преобразованиям, не изменяющим ее состояния или ее свойств. Если физические законы, устанавливающие связь между физическими величинами или параметрами, не меняются в результате таких операций или преобразований, то говорят, что они инвариантны относительно этих преобразований или обладают симметрией к этим преобразованиям.

Введем преобразования пространства и времени: Первое из них – *перенос или сдвиг системы как целого в пространстве*. Такая операция преобразования сводится к переносу начала отсчета и задается вектором. Симметрия физических законов относительно сдвигов в пространстве означает эквивалентность всех точек пространства. Не существует какой-то «особой» точки в пространстве, которую можно было бы выделить для введения абсолютной системы отсчета. Этот важнейший факт принято называть *однородностью пространства.*

Второе преобразование – *поворот системы отсчета или системы координат в пространстве*. Его можно свести к поворотам системы относительно одной или всех координатных осей. Симметрия физических процессов и законов относительно этого преобразования связана *с изотропностью пространства*, то есть с эквивалентностью всех направлений в пространстве. Нет такого направления, относительно которого мы могли бы задать, например, ось (*ox*) и которое имело бы преимущества перед другими. Все направления в пространстве равноправны.

Третье преобразование – *сдвиг во времени или изменение начала отсчета времени*. Симметрия физических законов относительно сдвига во времени означает, что законы, явления, процессы не меняются со временем, то есть физический процесс или явление можно повторить или воспроизвести. Безразлично, в каком времени рассматривать физический процесс: в прошлом, в настоящем или в будущем; он всегда будет протекать одинаково. Благодаря этому обстоятельству можно произвольно выбирать начало отсчета времени.

В 1918 г. немецкий математик Э. Нётер сформулировала теорему, названную позднее ее именем. Эта теорема устанавливает связь между свойствами симметрии физической системы и законами сохранения.

Закон сохранения энергии отражает симметрию явлений природы по отношению к переносу во времени, то есть постоянство законов природы во времени.

Покажем это от противного: пусть, например, меняется во времени закон всемирного тяготения, точнее даже не сам закон, а только гравитационная постоянная G. Поднятое в какой-то момент времени на высоту h тело будет обладать потенциальной энергией, где ускорение свободного падения равно: $g = (GM)/\ R_з^2$, где M – масса Земли; $R_з$ – ее радиус. Если гравитационная постоянная G будет меняться, то вместе с ней будут меняться потенциальная и полная механическая энергия. Налицо нарушение закона сохранения энергии.

Отсюда вывод: если бы законы природы менялись со временем, то это привело бы к нарушению закона сохранения энергии.

Импульсом или количеством движения тела называется произведение скорости поступательного движения этого тела на его массу (8.1):

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

Импульсом системы называется векторная сумма импульсов всех тел, образующих эту систему. Если в системе имеются только силы взаимодействия и нет внешних сил, то такая система называется замкнутой. Закон сохранения импульса гласит: полный импульс изолированной системы не меняется, то есть остается постоянным при любых взаимодействиях внутри этой системы. Этот закон отражает тот факт, что сдвиг в произвольном направлении на любое расстояние начала координат не меняет величины и направления импульса и никак не отражается на законах природы.

Закон сохранения импульса является отображением однородности пространства, то есть отсутствием каких-либо выделенных, «особых» точек в пространстве.

Закон сохранения момента импульса (или количества вращения) является отображением еще одного фундаментального свойства пространства – его изотропности.

Момент импульса $\vec{L}$ равен векторному произведению радиуса вектора тела на импульс тела (10.1):

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}].$$

Полный момент импульса системы равен векторной сумме моментов импульса всех тел системы. Система называется замкнутой, если в ней имеются только силы взаимодействия между телами и нет внешних сил. Закон сохранения момента импульса гласит: *полный момент импульса замкнутой системы не меняется ни при каких взаимодействиях тел внутри этой системы*.

Величина и направление момента импульса зависят лишь от длин и взаимной ориентации векторов $\vec{r}$ и $\vec{p}$. Значит, какое бы направление координатных осей в пространстве мы ни приняли, момент импульса тела от этого не изменится. Закон сохранения момента импульса и является отображением изотропности пространства, отсутствия выделенных направлений в пространстве.

20. Преобразования Галилея

Преобразования Галилея связывают положение тела, скорость и ускорение в двух разных инерциальных системах отсчета (рис. 20.1). Одна из них – система K – покоится, а вторая – система K' – движется относительно первой с постоянной скоростью υ. Будем считать, что в начальный момент времени координатные оси двух систем совпадали. В дальнейшем скорость υ направлена вдоль оси ox.

Как видно из рис. 20.1,

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R} = \vec{r}\,' + \vec{\upsilon} t; \quad \Rightarrow$$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{\upsilon} t. \tag{20.1}$$

Перепишем (20.1) в координатной форме и получим преобразования Галилея для координат:

$$x' = x - \upsilon t; \qquad y' = y; \qquad z' = z. \tag{20.2}$$

Продифференцируем преобразования для координат (20.2) по времени и получим преобразования Галилея для скоростей:

$$u'_x = u_x - \upsilon; \qquad u'_y = u_y; \qquad u'_z = u_z. \tag{20.3}$$

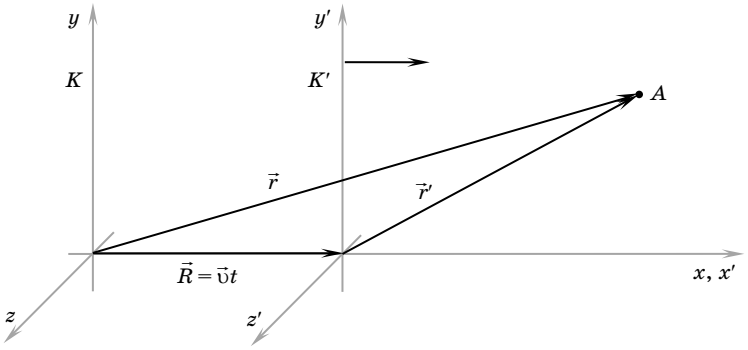


Рис. 20.1. Подвижная и неподвижная системы отсчета

Продифференцируем преобразования для скоростей (20.3) по времени и получим преобразования Галилея для ускорений:

$$a'_x = a_x; \qquad a'_y = a_y; \qquad a'_z = a_z. \tag{20.4}$$

Получается, что ускорения одинаковы в любой инерциальной системе отсчета. Такие величины называются *инвариантными* по отношению к преобразованиям Галилея или просто *инвариантами*. Кроме ускорений инвариантами преобразований Галилея являются: *действующие силы, длина отрезка, масса тела, длительность промежутков времени и др.*

Координаты и скорости зависят от выбора инерциальной системы отсчета. Такие величины называются *неинвариантными* по отношению к преобразованиям Галилея. Следовательно, неинвариантными являются также величины: *импульс*, *кинетическая* и *полная энергия*и др.

> Никакими механическими измерениями невозможно установить, какая инерциальная система покоится, а какая движется.

В этом утверждении состоит принцип относительности Галилея.

21. Неинерциальные системы отсчета

Рассмотрим две системы отсчета, одна из которых K – инерциальная, а вторая K' – неинерциальная. Считаем первую систему неподвижной, а вторую – движущейся относительно нее с ускорением $\vec{a}_0$, как это показано на рис. 21.1. В начальный момент времени координатные оси двух систем совпадали. Наблюдатель находится в неинерциальной системе K'.

Положение тела относительно систем связано соотношением:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}',$$

в котором $\vec{r}$ – положение тела относительно системы K; $\vec{r}'$ – положение тела относительно системы K'; $\vec{R}$ – перемещение системы K' относительно K.

Дифференцируем по времени левую и правую части написанного выражения и получаем:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}'.$$

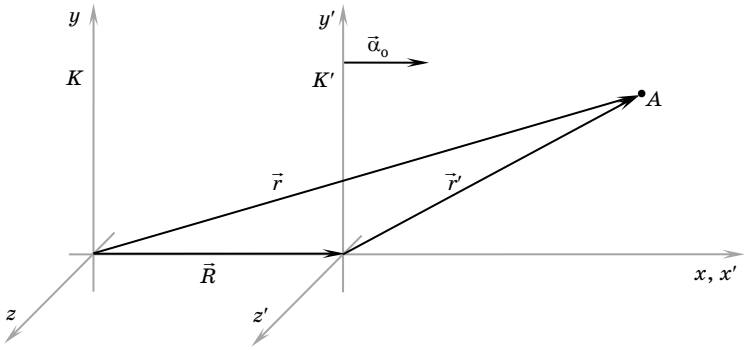


Рис. 21.1. Положение тела в инерциальной и неинерциальной системах отсчета

В этом выражении $\vec{\upsilon}$ – скорость тела относительно системы K; $\vec{\upsilon}'$ – скорость тела относительно системы K'; $\vec{\upsilon}_0$ – скорость системы K' относительно системы K. Еще раз дифференцируем по времени левую и правую части написанного выражения и получаем:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' \text{ или } \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0.$$

Здесь $\vec{a}'$ – ускорение тела относительно неинерциальной системы отсчета K'; K' – ускорение тела относительно неподвижной (инерциальной) системы K; $\vec{a}_0$ – ускорение системы K' относительно системы K.

Домножим получившееся выражение на массу тела и учтем, что согласно *второму закону Ньютона* произведение массы тела на его ускорение есть сумма всех сил, приложенных к телу:

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_i - m\vec{a}_0. \qquad (21.1)$$

Справа в этом выражении стоит сумма всех сил, действующих на тело в инерциальной системе отсчета. Если назвать силой инерции величину:

$$\vec{F}_и = -m\vec{a}_0, \qquad (29.2)$$

то получится *второй закон Ньютона* для неинерциальной системы отсчета.

> Ускорение тела в неинерциальной системе отсчета равно сумме всех сил, включая силу инерции, приложенных к нему, деленной на массу тела.

Отметим, что сил инерции нет, если рассматривать движение относительно инерциальной системы отсчета. Однако часто наблюдатель бывает связан с неинерциальной системой отсчета. Его ощущения и наблюдения описываются с привлечением силы инерции. Каждый из нас многократно сталкивался с действием этих сил в общественном транспорте. Когда автобус резко тормозит, то есть ускорение системы отсчета a_o направлено назад, мы ощущаем силу инерции, которая толкает нас вперед. При резком разгоне, когда ускорение автобуса направлено вперед, сила инерции, напротив, толкает нас назад. При повороте автобуса направо возникает центробежная сила инерции, отбрасывающая нас налево.

22. Центробежная сила

Рассмотрим неинерциальную систему отсчета, которая вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью[1]. Любая неподвижная относительно этой системы точка имеет нормальное ускорение, связанное с вращением системы, определяемое по формуле (3.9):

$$\vec{a}_n = \left[\vec{\omega}_o \vec{\upsilon}\right].$$

Скорость равномерного движения точки по окружности с радиусом R согласно формуле (3.6) равна:

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}_o \vec{R}\right].$$

Вектор $\vec{R}$ в этой формуле направлен от оси вращения к материальной точке. Подставляя последнюю формулу в предпоследнюю, получаем двойное векторное произведение:

$$\vec{a}_n = \left[\vec{\omega}_o \left[\vec{\omega}_o \vec{R}\right]\right].$$

Сведения из математики

Двойное векторное произведение выражается через скалярные произведения:

$$\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\vec{b}\right). \qquad (22.1)$$

[1] Как было показано в главе 3, этот вектор направлен вдоль оси вращения.

Для запоминания этой формулы существует мнемоническое правило:

«БАЦ минус ЦАБ»:

$$\vec{a}_n = \left[\vec{\omega}_o\left[\vec{\omega}_o\vec{R}\right]\right] = \vec{\omega}_o\left(\vec{\omega}_o\vec{R}\right) - \vec{R}\left(\vec{\omega}_o\vec{\omega}_o\right) = -\vec{R}\omega_o^2.$$

$$\vec{\omega}_o \perp \vec{R} \;\Rightarrow\; \left(\vec{\omega}_o\vec{R}\right) = 0 \Uparrow \qquad \Uparrow \left(\vec{\omega}_o\vec{\omega}_o\right) = \omega_o^2$$

$$\vec{a}_n = -\vec{R}\omega_o^2. \tag{22.2}$$

Нормальное ускорение направлено к центру окружности, по которой движется материальная точка. Равнодействующая всех сил, приложенных к ней, есть сила центростремительная. Она равна:

$$\vec{F}_{\text{цс}} = -m\vec{R}\omega_o^2. \tag{22.3}$$

Еще раз подчеркнем, что в инерциальной системе отсчета:

– точка движется с ускорением;

– никакие силы инерции на нее не действуют.

Если же мы рассматриваем эту точку относительно вращающейся системы отсчета, то в этой системе точка покоится. И этот покой обеспечивается дополнительной силой – силой инерции, которая в сумме с силой (22.3) должна дать ноль. Значит, эта сила направлена от центра окружности и равна:

$$\vec{F}_{\text{цб}} = m\vec{R}\omega_o^2. \tag{22.4}$$

Эта сила называется *центробежной*. Отметим еще раз, что центробежной силы нет, если рассматривать движение относительно правильной – инерциальной – системы отсчета, как это предполагается при формулировке *второго закона Ньютона*. Центробежная сила возникает вследствие того, что наблюдатель оказывается в неинерциальной вращающейся системе отсчета. Центробежная сила действует вне зависимости от того, движется тело относительно системы отсчета или покоится.

На рис. 22.1 показано действие центробежной силы в транспорте.

Автобус движется со скоростью $\vec{\upsilon}_o$ относительно инерциальной системы отсчета. Человек неподвижен относительно автобуса, значит, относительно инерциальной системы отсчета он движется с такой же скоростью $\vec{\upsilon}_o$. Автобус начинает поворачивать, при этом его скорость остается постоянной по величине $\upsilon = \upsilon_o$, но меняет свое направление. Если никаких сил, связывающих человека с автобу-

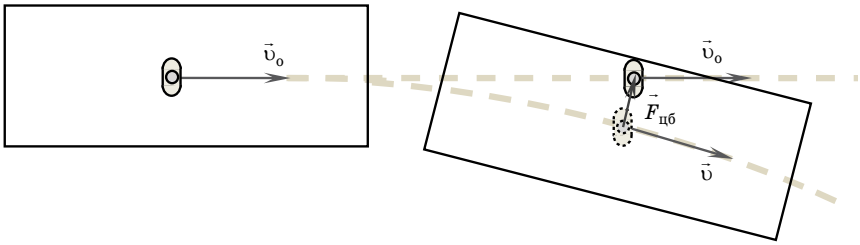


Рис. 22.1. Возникновение центробежной силы, действующей на человека в транспорте

сом, не действует, он ни за что не держится и ни во что не упирается, сила реакции пола компенсирует силу тяжести, то согласно *первому закону Ньютона* он продолжает прямолинейное равномерное движение относительно инерциальной системы отсчета, относительно улицы. При этом человек налетает на стенку поворачивающего автобуса. Поскольку человек связывает свое положение не с улицей, а с автобусом, то есть с неинерциальной системой отсчета, он воспринимает происходящее как действие центробежной силы. Еще раз подчеркнем, центробежная сила возникает только в неинерциальной системе отсчета. В инерциальной системе такой силы нет. Относительно инерциальной системы отсчета человек продолжает прямолинейное равномерное движение.

Мы привыкли считать, что тело, движущееся по окружности, имеет центростремительное ускорение. Где же оно в нашем случае? Его нет до тех пор, пока человек продолжает двигаться прямолинейно, пока он за что-нибудь ни схватится или во что-нибудь ни упрется. Как только это произойдет, возникнет сила взаимодействия – центростремительная сила, заставляющая двигаться по окружности. Именно в этот момент в инерциальной системе отсчета, связанной с улицей, возникнет нормальное центростремительное ускорение. В неинерциальной системе отсчета, связанной с автобусом, человек будет неподвижен. Центробежная сила уравновесится центростремительной силой взаимодействия со стенкой, с поручнем или с кем-либо из пассажиров.

23. Сила Кориолиса

В неинерциальной вращающейся системе отсчета действует еще одна сила инерции. Если тело движется относительно такой неинерциальной системы отсчета со скоростью $\vec{\upsilon}'$, то на него кроме центро-

бежной силы действует *сила Кориолиса*. На рис. 23.1 показан пример, иллюстрирующий возникновение этой силы.

Подкрашенный шарик катится по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}$ и оставляет за собой след, как это показано на рис. а). В точке A шарик закатывается на неподвижный диск, в точке B – скатывается с него. Скорость шарика при этом, разумеется, не меняется ни по величине, ни по направлению. След от шарика на диске – отрезок AB.

Рассмотрим случай б), когда диск во время движения шарика вращается с угловой скоростью ω_o. Сила трения качения очень мала, она не может заметно изменить скорость шарика ни по величине, ни по направлению за время его движения по диску. Шарик скатывается с диска на стол в той же точке, что и на левом рисунке. Однако диск за время движения шарика поворачивается на некоторый угол, и шарик скатывается с него в другой точке относительно диска: не в точке B, а в точке B'. Относительно стола движение шарика оставалось равномерным и прямолинейным – отрезок AB, но относительно диска шарик двигался по дуге AB'. Почему траектория шарика стала криволинейной? Потому, что на шарик во вращающейся системе отсчета действует некая сила. Это не центробежная сила. Она направлена не вдоль радиуса диска, а перпендикулярно скорости относительного движения $\vec{\upsilon}'$. Эта сила называется *силой Кориолиса*. Найдем ее величину.

Рассмотрим круглую платформу, вращающуюся с угловой скоростью ω_0 против часовой стрелки. Пусть тело массой m движется

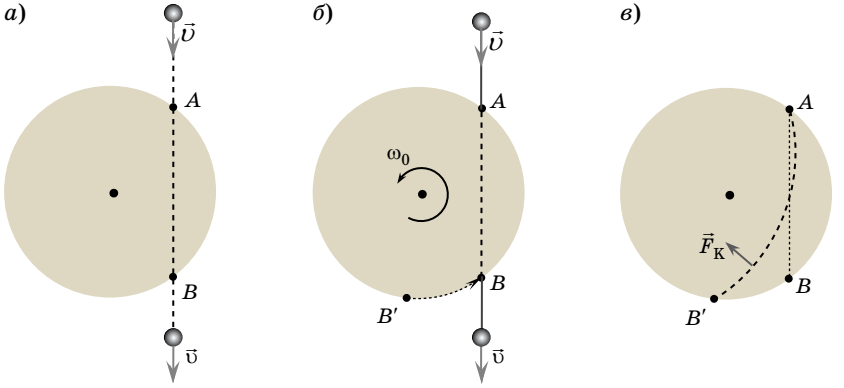


Рис. 23.1. Сила Кориолиса, действующая на шарик

относительно этой платформы со скоростью υ' в направлении, показанном на рис. 23.2.

Ускорение тела относительно вращающегося диска равно:

$$\vec{a}' = \frac{\upsilon'^2}{R}\vec{n}. \qquad (23.1)$$

Полное ускорение тела относительно неподвижной инерциальной системы отсчета равно:

$$\vec{a} = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}. \qquad (23.2)$$

В этих формулах $\vec{n}$ – вектор нормали, направленный к центру диска.

Как связаны эти ускорения друг с другом? Скорость тела относительно неподвижной системы отсчета и относительно вращающегося диска связаны соотношением:

$$\upsilon = \upsilon' - \omega_o R.$$

Следовательно, $\vec{a} = \frac{(\upsilon' - \omega_o R)^2}{R}\vec{n} = \frac{\upsilon'^2}{R}\vec{n} + \frac{(\omega_o R)^2}{R}\vec{n} - \frac{2\upsilon'\omega_o R}{R}\vec{n};$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \omega_o^2 R\vec{n} - 2\upsilon'\omega_o\vec{n};$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \omega_o^2 R\vec{n} + 2\upsilon'\omega_o\vec{n}.$$

Вектор нормали, взятый со знаком минус, направлен от центра диска к его краю. Значит, второе слагаемое в правой части – центро-

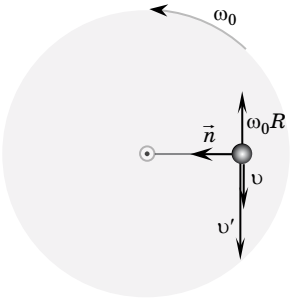


Рис. 23.2

бежное ускорение. Домножим левую и правую части на массу тела. Учтем *второй закон Ньютона* (6.2), который справедлив только в инерциальной системе отсчета:

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_i + \vec{F}_{\text{цб}} + 2m\upsilon'\omega_{\text{o}}\vec{n}.$$

В неинерциальной вращающейся системе отсчета на тело действуют две силы инерции: центробежная, направленная против вектора нормали, и сила Кориолиса, направленная в рассматриваемом случае к центру вращения:

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_i + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{K}}. \qquad (23.3)$$

В общем случае сила Кориолиса равна:

$$\vec{F}_{\text{K}} = 2m\left[\vec{\upsilon}'\vec{\omega}_{\text{o}}\right]. \qquad (23.4)$$

Она направлена перпендикулярно скорости $\vec{\upsilon}'$ движения тела относительно неинерциальной системы отсчета и угловой скорости $\vec{\omega}_{\text{o}}$ вращения этой системы отсчета.

Отметим еще раз, что силы Кориолиса нет, если рассматривать движение относительно «правильной» – инерциальной системы отсчета, как это предполагается при формулировке *первого закона Ньютона* (на рис. 23.1 – относительно стола). Эта сила возникает вследствие того, что движение происходит относительно неинерциальной вращающейся системы отсчета. В отличие от центробежной силы, эта сила действует только на тела, движущиеся относительно этой системы отсчета. Сила Кориолиса направлена перпендикулярно скорости тела, поэтому работы она не совершает. Она меняет направление скорости, но не величину.

Наша Земля является вращающейся системой отсчета. На движущиеся вблизи нее тела действует сила Кориолиса. В некоторых случаях эту силу нужно учитывать. Например, при вертикальном падении тела на широте Петербурга с высоты 20 м сила Кориолиса отклоняет тело на восток на 0,73 мм[1]. При движении тел с большими скоростями отклонение становится заметным. При расчете полета снарядов и ракет на большие расстояния эту силу обязательно учитывают.

---

[1] В инерциальной системе отсчета это отклонение связано с различием линейных скоростей вращения Земли на разных высотах.

ДИНАМИКА ВРАЩЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

24. Момент инерции

Момент инерции – это мера инертности абсолютно твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси.

Сначала дадим определение момента инерции материальной точки относительно оси OO' на рис. 24.1:

$$I = mR^2. \tag{24.1}$$

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему жестко связанных материальных точек. Момент инерции такой системы складывается из моментов инерции отдельных материальных точек:

$$I = \sum \Delta I_i = \sum \Delta m_i R_i^2. \tag{24.2}$$

В этой формуле Δm_i – масса материальной точки; R_i – расстояние от нее до оси; ΔI_i – ее момент инерции. Индекс i нумерует все материальные точки.

Отметим, что тело не обязательно вращается вокруг некой оси. Оно может быть неподвижным, а вращение допускается лишь гипотетически.

Формула (24.2) говорит о том, что момент инерции – аддитивная величина. Если из нескольких тел составить одно, то его момент инерции будет равен сумме моментов инерции составляющих его тел. Подразумевается, что все тела вращаются вокруг одной и той же оси.

Рассмотрим тонкий обруч, изображенный на рис. 24.2. Масса обруча m. Толщина обруча много меньше его радиуса R.

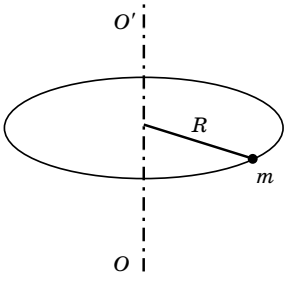


Рис. 24.1. Вращение материальной точки вокруг оси

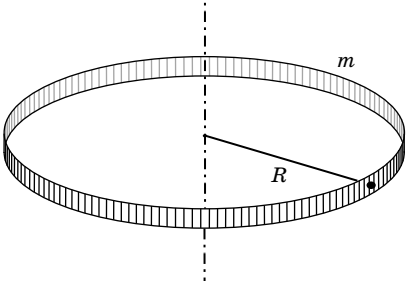


Рис. 24.2. Тонкий обруч

Разбиваем обруч на малые элементы с массами Δm_i. Все они находятся на одинаковом расстоянии R от оси, поэтому формулу 24.2 запишем в следующем виде:

$$I = R^2 \sum \Delta m_i .$$

Сумма масс всех элементов – это масса всего обруча m, поэтому:

$$I = mR^2 . \qquad (24.3)$$

Точно такую же формулу получим для тонкой трубы. От высоты трубы в формуле ничего не зависит. От высоты трубы зависит масса этой трубы, но это не меняет формулу (24.3).

В случае непрерывного распределения массы тела по объему вместо суммы (24.2) будет интеграл по объему тела:

$$I = \int\limits_{(V)} r^2 dm = \int\limits_{(V)} \rho r^2 dV . \qquad (24.4)$$

Пример 24.1. Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной этому стержню, проходящей через его середину.

На рис. 24.3 изображен стержень массой m и длиной ℓ. Толщина стержня много меньше его длины. Ось ox направлена вдоль стержня. Вращение стержня возможно вокруг оси oy, проходящей через его середину. Выделим малый элемент стержня длиной dx на расстоянии x от оси. Этот элемент можно рассматривать как материальную точку массой dm:

$$\frac{dm}{dx} = \frac{m}{\ell}; \quad \Rightarrow \quad dm = \frac{m}{\ell} dx .$$

Момент инерции этой материальной точки относительно оси:

$$dI = x^2 dm = \frac{m x^2 dx}{\ell} .$$

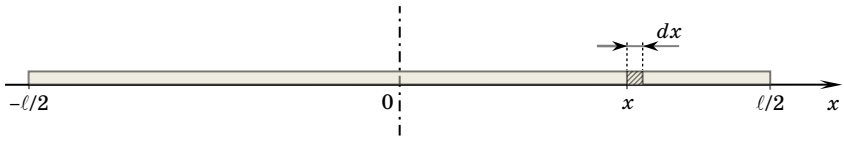


Рис. 24.3. Длинный тонкий стержень

Момент инерции всего стержня равен интегралу от написанного выражения в пределах допустимых значений x, то есть от $-\ell/2$ до $+\ell/2$. Ввиду малости толщины стержня имеем только одну пространственную переменную – x. При этом трехмерный интеграл по объему тела превращается в хорошо известный одномерный *интеграл Римана*:

$$I = \int\limits_{(V)} r^2 dm = \int\limits_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{mx^2 dx}{\ell} = \frac{m}{\ell} \int\limits_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx =$$

$$= \frac{m}{\ell} \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\ell/2}^{\ell/2} = \frac{m}{3\ell}\left(\frac{\ell^3}{8} - \frac{(-\ell)^3}{8} \right) = \frac{m\ell^3}{24\ell} + \frac{m\ell^3}{24\ell};$$

$$I = \frac{m\ell^2}{12}. \tag{24.5}$$

Мы получили момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной этому стержню, проходящей через его середину.

Пример 24.2. Момент инерции сплошного цилиндра относительно его оси симметрии.

На рис. 24.4 изображен цилиндр с массой m, высотой h и радиусом R.

Разобьем его на тонкие трубки с радиусами r, толщинами dr. Одна из них показана на рисунке. Ее массу dm можно найти из соотношения:

$$dm = \frac{m}{V} dV.$$

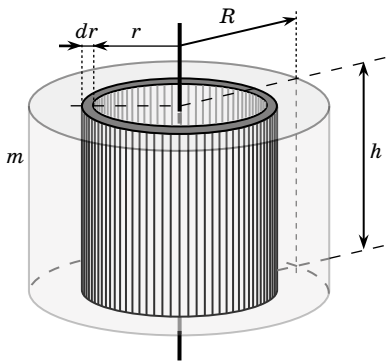


Рис. 24.4. Сплошной цилиндр

В этой формуле: $V = \pi R^2 h$ – объем всего цилиндра; $dV = h dS$ – объем выделенной трубки.

Площадь кольца dS (площадь сечения трубки) равна длине окружности $2\pi r$, умноженной на толщину dr этого кольца:

$$dS = 2\pi r dr;$$

$$dV = h 2\pi r dr.$$

Таким образом, $dm = \dfrac{mh}{h\pi R^2} 2\pi r dr = \dfrac{m}{R^2} 2r dr$.

Момент инерции такой тонкой трубки согласно формуле (24.3) равен:

$$dI = r^2 dm, \quad \Rightarrow \quad dI = \frac{m}{R^2} 2r^3 dr.$$

Момент инерции цилиндра есть интеграл (24.4) по всему объему; в данном случае – интеграл по радиусу r от 0 до R. Трехмерный интеграл по объему тела сводится к одномерному интегралу Римана:

$$I = \int\limits_{(V)} r^2 dm = \frac{2m}{R^2} \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{m}{R^2} \frac{R^4}{2} - 0;$$

$$I = \frac{mR^2}{2}. \tag{24.6}$$

Мы получили момент инерции сплошного цилиндра относительно его оси симметрии. Сравнивая полученную формулу с (24.3), отмечаем наличие коэффициента $^1/_2$. Дело в том, что вся масса тонкой трубы расположена на одном и том же расстоянии R от оси. Поэтому коэффициент в формуле (24.3) равен единице. Масса сплошного цилиндра равномерно распределена по объему. Коэффициент $^1/_2$ в формуле (24.6) говорит о том, что масса цилиндра распределена в среднем ближе, чем на расстоянии R от оси. Она распределена равномерно по объему.

Очевидно, что от высоты h в полученной формуле ничего не зависит[1]. Такая же формула применима для расчета момента инерции тонкой круглой пластины относительно оси, проходящей через центр этого круга перпендикулярно его плоскости.

---

[1] От высоты цилиндра зависит его масса, но формула (24.6) от этого не меняется.

Пример 24.3. Момент инерции полого цилиндра относительно его оси симметрии.

На рис. 24.5 изображен цилиндр с массой m, высотой h и радиусом R_1. Внутри этого цилиндра имеется сквозное отверстие с радиусом R_2. Такой цилиндр можно рассматривать как сплошной цилиндр радиусом R_1, из которого удален цилиндр радиусом R_2, как это показано на рис. 24.6.

Масса первого цилиндра равна:

$$m_1 = \rho \cdot \pi R_1^2 \cdot h,$$

масса второго цилиндра равна:

$$m_2 = \rho \cdot \pi R_2^2 \cdot h,$$

масса полого цилиндра равна:

$$m = m_1 - m_2 = \rho h \cdot \pi \left(R_1^2 - R_2^2 \right).$$

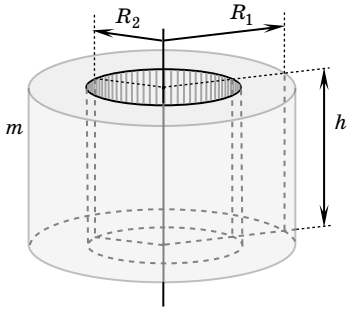


Рис. 24.5. Полый цилиндр

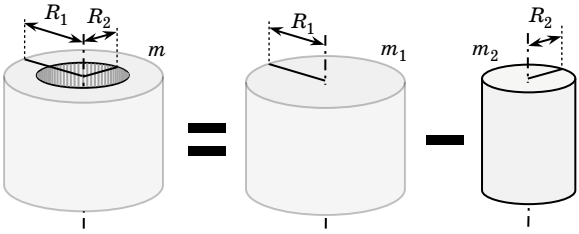


Рис. 24.6. Полый цилиндр

Момент инерции первого цилиндра равен:

$$I_1 = ½ \cdot m_1 R_1^2 = ½ \cdot \rho h \cdot \pi R_1^4,$$

момент инерции второго цилиндра равен:

$$I_2 = ½ \cdot m_2 R_2^2 = ½ \cdot \rho h \cdot \pi R_2^4.$$

Искомый момент инерции полого цилиндра в силу аддитивности равен:

$$I = I_1 - I_2 = ½ \cdot \rho h \cdot \pi\left(R_1^4 - R_2^4\right) = ½ \cdot \rho h \cdot \pi\left(R_1^2 - R_2^2\right) \cdot \left(R_1^2 + R_2^2\right);$$

$$I = \frac{m}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right). \qquad (24.7)$$

Рассмотрим предельные случаи полученной формулы.

При $R_2 = R_1$ рассматриваемый полый цилиндр превращается в тонкую трубу. Формула (24.7) при этом превращается в формулу (24.3):

$$I = \frac{m}{2}\left(R_1^2 + R_1^2\right) = \frac{m}{2} 2R_1^2 = mR_1^2.$$

При $R_2 = 0$ рассматриваемый полый цилиндр превращается в сплошной. Формула (24.7) при этом превращается в формулу (24.6):

$$I = \frac{m}{2}\left(R_1^2 + 0\right) = \frac{mR_1^2}{2}.$$

Таким образом, формула (24.7) не противоречит формулам (24.3) и (24.6).

25. Теорема Штейнера

Представим себе тело массой m, через которое проходят две параллельные оси, причем одна из них – через центр масс: точку C. Момент инерции относительно этой оси равен I. Момент инерции относительно другой оси равен I'. Расстояние между осями b. На рис. 25.1 показано это тело и оси z и z'. Момент инерции I' связан с моментом инерции I соотношением:

$$I' = I + mb^2. \qquad (25.1)$$

Докажем эту теорему.

Посмотрим на тело сверху. Оси z и z' будут смотреть на нас. Направление других осей показано на рис. 25.2. Разобьем тело на малые

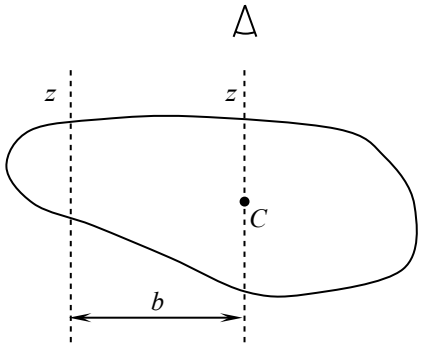


Рис. 25.1. Абсолютно твердое тело с двумя осями подвеса

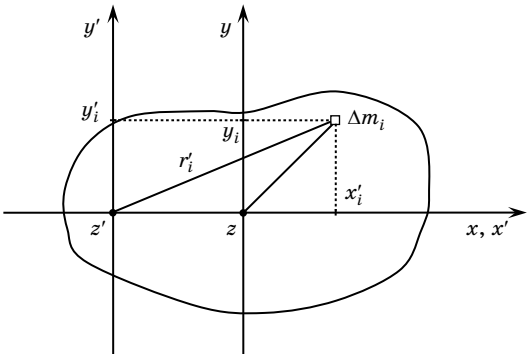


Рис. 25.2. Малый элемент абсолютно твердого тела

элементы с массами Δm_i, которые в дальнейшем будем считать материальными точками. Индекс i нумерует эти элементы. На рис. 25.2 показан один из них.

Момент инерции этого i-го элемента относительно оси z равен:

$$\Delta I_i = \Delta m_i r_i^2 = \Delta m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right).$$

Момент инерции всего тела относительно оси z равен:

$$I = \sum \Delta m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right). \qquad (25.2)$$

Момент инерции этого же элемента относительно оси z' равен:

$$\Delta I_i' = \Delta m_i r_i'^2 = \Delta m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 \right) = \ldots$$

Поскольку расстояние между осями z и z', также как и между y и y', равно b:

$$x_i' = x_i + b; \qquad y_i' = y_i; \qquad z_i' = z_i.$$

Учитывая это, продолжим наши выкладки:

$$\ldots = \Delta m_i \left(x_i^2 + 2bx_i + b^2 + y_i'^2 \right) = \Delta m_i \left(x_i^2 + y_i'^2 \right) + 2b\Delta m_i x_i + \Delta m_i b^2.$$

Момент инерции всего тела относительно оси z' равен:

$$I' = \sum \Delta m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) + 2b \sum \Delta m_i x_i + b^2 \sum \Delta m_i.$$

$$I' = I + 2b \sum \Delta m_i x_i + mb^2.$$

Если ось z проходит через центр масс тела, то второе слагаемое в полученном выражении равно нулю. Это следует из формулы (9.1), написанной для одной координаты x. Таким образом, окончательно имеем:

$$I' = I + mb^2.$$

Теорема доказана.

Пример 25.1. Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной этому стержню, проходящей через один из его концов.

Момент инерции стержня относительно середины стержня – оси O_1 – нам известен (формула 24.5):

$$I_1 = \frac{m\ell^2}{12}.$$

Очевидно, что $b = \frac{\ell}{2}$.

Таким образом:

$$I_2 = I_1 + mb^2 = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3}.$$

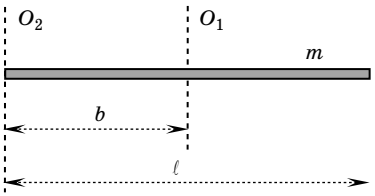


Рис. 25.3. Длинный тонкий стержень

Момент инерции длинного тонкого стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно этому стержню через один из его концов, равен:

$$I = \frac{m\ell^2}{3}. \tag{25.3}$$

26. Моменты инерции тела относительно трех координатных осей

Введем момент инерции абсолютно твердого тела относительно точки. Сначала введем момент инерции материальной точки относительно начала координат:

$$\Theta = mr^2, \tag{26.1}$$

где r – расстояние от начала координат до материальной точки, как это показано на рис. 26.1. Очевидно, что:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему жестко связанных материальных точек. Момент инерции относительно выделенной точки для такой системы находится сложением моментов инерции отдельных материальных точек:

$$\Theta = \sum \Delta m_i r_i^2 = \sum \Delta m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right). \tag{26.2}$$

В этой формуле Δm_i – масса материальной точки; r_i – расстояние от нее до центра. Индекс i нумерует все материальные точки.

> Отметим, что момент инерции относительно точки – это величина, не имеющая физического смысла. Она введена лишь для удобства дальнейших рассуждений. Физический смысл имеет лишь момент инерции относительно оси.

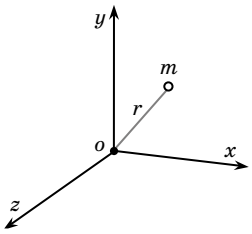


Рис. 26.1. Момент инерции относительно начала координат

Момент инерции относительно оси x равен:

$$I_x = \sum \Delta m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right);$$

момент инерции относительно оси y равен:

$$I_y = \sum \Delta m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right);$$

момент инерции относительно оси z равен:

$$I_z = \sum \Delta m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right).$$

Сложим эти три выражения:

$$I_x + I_y + I_z = \sum \Delta m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right) +$$

$$+ \sum \Delta m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) + \sum \Delta m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right) = \sum 2\Delta m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right) = 2\Theta.$$

> Сумма моментов инерции абсолютно твердого тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей равна удвоенному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей:
>
> $$I_x + I_y + I_z = 2\Theta. \qquad (26.3)$$

Получившееся утверждение можно использовать для вычисления моментов инерции некоторых тел.

Пример 26.1. Момент инерции сферы относительно оси, проходящей через ее центр.

Все точки сферы лежат на одинаковом расстоянии от ее центра, значит, момент инерции сферы относительно точки пересечения осей равен:

$$\Theta = \sum \Delta m_i r_i^2 = \sum \Delta m_i R^2 = mR^2,$$

где R – радиус сферы; m – ее масса.

Назовем ось, проходящую через центр сферы, буквой x, а искомый момент инерции I_x. Проведем через центр сферы еще две оси – y и z так, чтобы они оказались взаимно перпендикулярными. Очевидно, что моменты инерции относительно всех этих осей равны:

$$I_x = I_y = I_z.$$

Воспользуемся формулой (26.3):

$$I_x + I_y + I_z = 2\Theta; \quad \Rightarrow \quad 3I_x = 2mR^2.$$

Момент инерции сферы относительно оси, проходящей через ее центр, равен:

$$I_x = \frac{2}{3}mR^2. \tag{26.4}$$

Пример 26.2. Момент инерции круга относительно оси, проходящей через его центр и лежащей в плоскости этого круга (рис. 26.2).

Плоский круг формально является цилиндром с нулевой высотой. Его момент инерции относительно оси z можно найти по формуле (24.6):

$$I_z = \frac{mR^2}{2}.$$

Поскольку фигура плоская, то есть $z = 0$, момент инерции относительно точки пересечения этих осей x и y равен моменту инерции относительно оси z:

$$I_z = \Theta.$$

В силу симметрии тела моменты инерции относительно осей x и y равны друг другу:

$$I_x = I_y.$$

Воспользуемся формулой (26.3):

$$I_x + I_y + I_z = 2\Theta, \quad \Rightarrow \quad 2I_x + I_z = 2I_z, \quad \Rightarrow \quad 2I_x = I_z;$$

$$I_x = \frac{I_z}{2}. \tag{26.5}$$

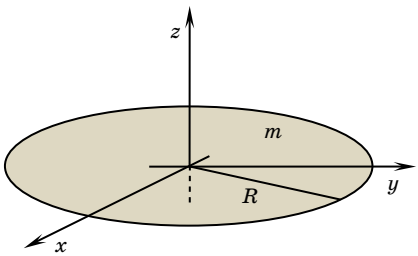


Рис. 26.2. Вычисление момента инерции плоской фигуры

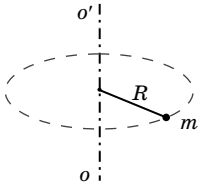
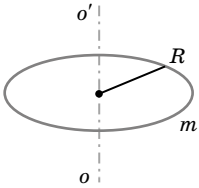
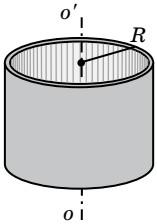
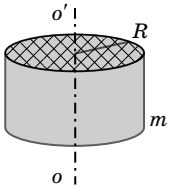
Момент инерции круга относительно оси, проходящей через его центр и лежащей в его плоскости, равен:

$$I_x = \frac{mR^2}{4}. \qquad (26.6)$$

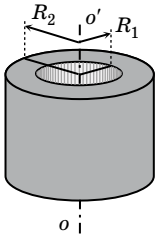
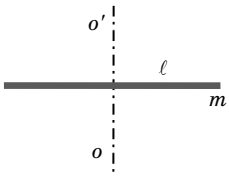
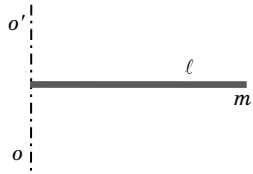
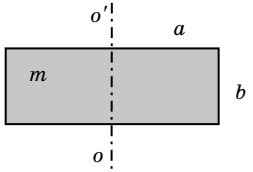
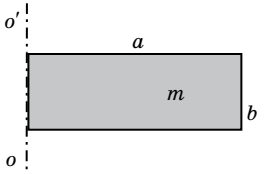
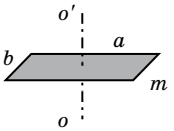
В табл. 2 приведены значения моментов инерции некоторых геометрических фигур.

Таблица 2

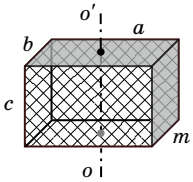
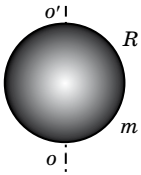
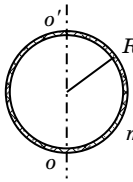
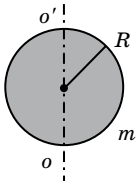
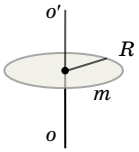
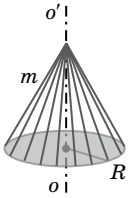
Моменты инерции некоторых геометрических тел

Геометрическое тело	Рисунок	Формула	
Материальная точка		$I = mR^2$	(24.1)
Тонкий обруч		$I = mR^2$	(24.3)
Тонкая труба		$I = mR^2$	(24.3)
Сплошной цилиндр		$I = \frac{mR^2}{2}$	(24.6)

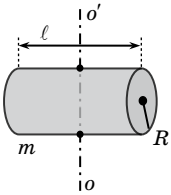
Продолжение табл. 2

Геометрическое тело	Рисунок	Формула	
Полый цилиндр		$I = \frac{m}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)$	(24.7)
Тонкий стержень		$I = \frac{m\ell^2}{12}$	(24.5)
Тонкий стержень		$I = \frac{m\ell^2}{3}$	(25.3)
Прямоугольник		$I = \frac{ma^2}{12}$	(24.5)
Прямоугольник		$I = \frac{ma^2}{3}$	(25.3)
Прямоугольник		$I = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{12}$	(26.7)

Продолжение табл. 2

Геометрическое тело	Рисунок	Формула	
Прямоугольный Параллелепипед		$I=\frac{m\left(a^2+b^2\right)}{12}$	(26.7)
Шар		$I=\frac{2}{5}mR^2$	(26.8)
Сфера		$I=\frac{2}{3}mR^2$	(26.4)
Круг		$I=\frac{mR^2}{4}$	(26.6)
Круг		$I=\frac{mR^2}{2}$	(24.6)
Конус		$I=\frac{3}{10}mR^2$	(26.9)

Окончание табл. 2

Геометрическое тело	Рисунок	Формула	
Цилиндр		$I = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{\ell^2}{12}\right)$	(26.10)

27. Момент импульса абсолютно твердого тела

На рис. 27.1 показан элемент абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Этот элемент является малым и рассматривается как материальная точка. Начало отсчета – точка O – находится в центре масс тела. Свободное вращение происходит вокруг оси, проходящей через эту точку. Выбранная нами материальная точка с номером i движется по окружности с радиусом R_i.

Мгновенная скорость $\vec{\upsilon}_i$ точки в любой момент времени определяется по формуле (3.6):

$$\vec{\upsilon}_i = \left[\vec{\omega}\vec{R}_i\right].$$

В этой формуле вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ совпадает по направлению с осью вращения.

Момент импульса рассматриваемой материальной точки $\Delta\vec{L}_i$ определяется формулой (10.1):

$$\Delta\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i \Delta m_i \vec{\upsilon}_i\right].$$

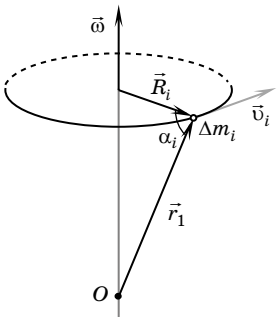


Рис. 27.1. Вращение малого фрагмента абсолютно твердого тела

Подставим верхнюю формулу в нижнюю и получим двойное векторное произведение:

$$\Delta\vec{L}_i = \Delta m_i \left[\vec{r}_i \left[\vec{\omega}\vec{R}_i\right]\right] = \ldots$$

Раскроем это двойное векторное произведение по правилу «БАЦ минус ЦАБ»:

$$\vec{r}_i \leftrightarrow \vec{a}; \qquad \vec{\omega} \leftrightarrow \vec{b}; \qquad \vec{R}_i \leftrightarrow \vec{c}.$$

$$\ldots = \vec{\omega}\Delta m_i \left(\vec{r}_i\vec{R}_i\right) - \Delta m_i \vec{R}_i \left(\vec{r}_i\vec{\omega}\right) = \vec{\omega}\Delta m_i R_i r_i \cos\alpha_i - \vec{R}_i \Delta m_i r_i \omega \sin\alpha_i =$$

$$\nwarrow\ r_i \cos\alpha_i = R_i$$

$$= \vec{\omega}\Delta m_i R_i^2 - \vec{R}_i \Delta m_i r_i \omega \sin\alpha_i.$$

Просуммируем по всем материальным точкам, образующим абсолютно твердое тело, и получим момент импульса всего абсолютно твердого тела:

$$\vec{L} = \vec{\omega}\sum \Delta m_i R_i^2 - \sum \vec{R}_i \Delta m_i r_i \omega \sin\alpha_i.$$

Первая сумма в этой формуле есть момент инерции абсолютно твердого тела относительно оси вращения:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} - \sum \vec{R}_i \Delta m_i r_i \omega \sin\alpha_i. \qquad (27.2)$$

Получившееся выражение содержит две компоненты:

– одна из них направлена вдоль оси вращения согласно правилу буравчика;

– вторая направлена перпендикулярно оси вращения.

> В общем случае момент импульса абсолютно твердого тела направлен под некоторым углом к оси вращения.

Смысл первой компоненты в формуле (27.1) понятен: продольная компонента момента импульса равна произведению момента инерции на угловую скорость вращения тела. О второй компоненте можно сказать только то, что направлена она по радиусу окружности, то есть это поперечная компонента. Чему она равна – очень трудно представить себе наглядно.

Формулу (27.2) можно записать без второй компоненты, если момент инерции считать *тензором*, то есть матрицей 3×3; $I \to \hat{\mathbf{I}}$;

$$\vec{L} = \hat{\mathbf{I}}\vec{\omega}. \qquad (27.3)$$

Физический смысл этой замены состоит в том, что моменты инерции одного и того же тела относительно разных осей разные.

Сведения из математики

Одной из важнейших задач линейной алгебры является поиск собственных чисел и собственных векторов матрицы. Для матрицы $\hat{\mathbf{A}}$ нужно найти такое число a и такой вектор $\vec{Y}$, чтобы умножение матрицы на этот вектор давало такой же результат, что и умножение числа на тот же вектор. Иными словами, нужно найти вектор $\vec{Y}$ и число a, удовлетворяющие уравнению:

$$\hat{\mathbf{A}}\vec{Y} = a\vec{Y}. \qquad (27.4)$$

При решении задачи (27.4) для трехмерной матрицы мы найдем три взаимно перпендикулярных собственных вектора и три соответствующих собственных числа[1].

Собственные вектора определяют направления главных осей инерции. Эти оси, как правило, естественным образом связаны с формой тела. Собственные числа – это моменты инерции относительно этих осей. Таким образом, если вращать тело только вокруг одной из главных осей инерции, то выражение (27.3) можно записать в виде:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \qquad (27.5)$$

В таком случае в формуле (27.2) можно забыть про вторую перпендикулярную компоненту. В дальнейшем ограничимся только этим случаем.

28. Уравнения динамики и статики абсолютно твердого тела

Продифференцируем выражение (27.5) по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(I\vec{\omega}\right)}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon}.$$

[1] Это решение является диагонализацией матрицы.

Вспомним уравнение моментов (11.1) $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i$ и получим *второй закон Ньютона для вращательного движения абсолютно твердого тела*:

$$\sum \vec{M}_i = I\vec{\varepsilon}. \qquad (28.1)$$

В написанной формуле слева сумма моментов всех сил, приложенных к телу; $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение тела. Формула (28.1) – основной закон динамики вращения тела. Если ось вращения тела не закреплена, то тело может совершать еще один вид движения, который описывается *вторым законом Ньютона для поступательного движения*, – формула (6.2). Перепишем ее в виде:

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}. \qquad (28.2)$$

В этой формуле слева стоит сумма всех приложенных к телу сил; m – масса тела; $\vec{a}$ – его ускорение.

Система уравнений (28.1), (28.2) описывает все возможные движения абсолютно твердого тела. Она позволяет решить для этого тела основную задачу динамики как в прямой, так и в обратной постановке. Не забудем, что каждое векторное уравнение содержит в себе по три скалярных. Полное количество уравнений в этой системе – шесть.

Прямая задача предполагает по известным законам поступательного движения центра масс $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и вращения $\varphi_x(t)$, $\varphi_y(t)$, $\varphi_z(t)$ нахождение действующих на тело сил и моментов сил. Прямая задача решается *дифференцированием*.

Обратная задача предполагает по известным действующим на тело силам и моментам сил определение законов поступательного и вращательного движений тела. Эта задача решается *интегрированием*. Для ее решения необходимо дополнительно знать начальные условия:

– три начальные координаты центра масс x_o, y_o, z_o;

– три проекции начальной скорости центра масс υ_{ox}, υ_{oy}, υ_{oz};

– три начальные угла ориентации тела φ_{ox}, φ_{oy}, φ_{oz};

– три проекции начальной угловой скорости тела ω_{ox}, ω_{oy}, ω_{oz}.

В зависимости от конкретной задачи начальных условий может быть меньше, и они могут быть немного другими.

Статика обозначает отсутствие поступательного движения и отсутствие вращения, то есть скорость и угловая скорость должны равняться нулю:

$$\vec{\upsilon} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0;$$
$$\vec{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\varepsilon} = 0.$$

Ускорение и угловое ускорение при этом тоже должны равняться нулю.

Таким образом, необходимые условия неподвижности абсолютно твердого тела можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_i &= 0, \\ \sum \vec{M}_i &= 0. \end{aligned} \tag{28.3}$$

Выражения (28.3) являются необходимыми, но не достаточными условиями. Например, им удовлетворяет шайба, которая без трения скользит по льду и при этом крутится в горизонтальной плоскости.

Чтобы эти условия стали достаточными, нужно к ним добавить требование неподвижности тела в начальный момент времени, то есть:

$$\begin{aligned} \vec{\upsilon}_o &= 0; \\ \vec{\omega}_o &= 0. \end{aligned} \tag{28.4}$$

При выполнении условий (28.3) и (28.4) тело, неподвижное в начальный момент времени, будет неподвижным в дальнейшем. Это и есть статика.

29. Работа и мощность при вращении абсолютно твердого тела

Работа силы $\vec{F}$ при малом перемещении $\Delta\vec{r}$ согласно формуле (12.3) равна:

$$\Delta A = (\vec{F}\Delta\vec{r}).$$

При повороте тела вокруг оси O на некоторый угол $\Delta\varphi$ все точки тела будут двигаться по дугам окружностей ΔS, как это показано на рис. 29.1. Если угол поворота мал, то длина дуги равна перемещению каждой точки $\Delta S = \Delta r$. Как было показано ранее в формуле (3.7):

$$\Delta\vec{S} = \left[\Delta\vec{\varphi}\vec{R}\right].$$

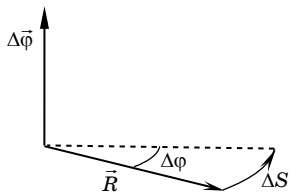


Рис. 29.1. Определение работы при вращении тела

Для работы по вращению тела имеем:

$$\Delta A = \left(\vec{F}\left[\Delta\vec{\varphi}\vec{R}\right]\right). \qquad (29.1)$$

Мы получили смешанное произведение трех векторов.

Сведения из математики

Смешанное произведение векторов $\left(\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right)$ равно объему параллелепипеда, образованного этими векторами.

Свойство смешанного произведения.

В смешанном произведении можно циклически переставлять сомножители:

$$\left(\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right) = \left(\vec{c}\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right) = \left(\vec{b}\left[\vec{c}\vec{a}\right]\right). \qquad (29.2)$$

Воспользуемся свойством смешанного произведения и циклически переставим сомножители в выражении (29.1):

$$\Delta A = \left(\vec{F}\left[\Delta\vec{\varphi}\vec{R}\right]\right) = \left(\Delta\vec{\varphi}\left[\vec{R}\vec{F}\right]\right) = \left(\Delta\vec{\varphi}\vec{M}\right);$$

$$\Delta A = \left(\vec{M}\Delta\vec{\varphi}\right). \qquad (29.3)$$

При вращении абсолютно твердого тела получилась формула для работы, аналогичная формуле (12.3) для работы при малом перемещении тела.

Мощность вращения абсолютно твердого тела можно найти, поделив формулу (29.3) на Δt:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \left(\vec{M}\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}\right) = \left(\vec{M}\vec{\omega}\right);$$

$$N = \left(\vec{M}\vec{\omega}\right). \qquad (29.4)$$

Мы получили формулу, аналогичную формуле (12.6) для поступательного движения.

30. Кинетическая энергия абсолютно твердого тела

Пусть тело вращается вокруг закрепленной оси. Разобьем его на элементарные области, каждую из которых в дальнейшем будем

считать материальной точкой с массой Δm_i. Каждая точка тела движется по окружности со своим собственным радиусом R_i. Центры всех окружностей лежат на оси вращения. Все точки тела имеют одну и ту же угловую скорость ω. Все это показано на рис. 30.1. Линейную скорость каждой точки тела можно найти, воспользовавшись формулой (3.2):

$$\upsilon_i = \omega R_i .$$

Кинетическая энергия элементарного фрагмента абсолютно твердого тела равна:

$$\Delta E_{\text{K}i} = \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i R_i^2 \omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия, связанная с вращением всего тела, равна:

$$E_{\text{K}}^{\text{вр}} = \sum_i \frac{\Delta m_i R_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i R_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \cdot I;$$

$$E_{\text{K}}^{\text{вр}} = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (30.1)$$

Если тело движется поступательно со скоростью υ и одновременно вращается вокруг оси, проходящей через центр масс с угловой скоростью ω, то полная кинетическая энергия равна сумме величин, задаваемых формулами (12.9) и (30.1):

$$E_{\text{K}} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (30.2)$$

Первое слагаемое в этом выражении есть кинетическая энергия поступательного движения, а второе – кинетическая энергия вращения.

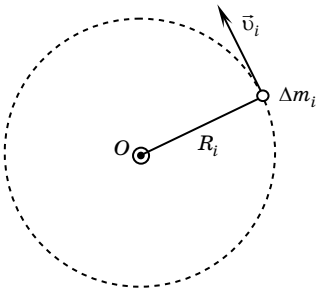


Рис. 30.1. Вращение элементарного фрагмента абсолютно твердого тела

31. Аналогия формул для поступательного и вращательного движений

Таблица 3

Сравнение формул для поступательного движения и вращения

Поступательное движение		Вращательное движение	
Координаты, радиус-вектор	$x, y, z, \vec{r}$	Угол поворота	φ
Скорость	$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Масса	m	Момент инерции	I
Импульс	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	Момент импульса	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Сила	$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Момент силы	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Работа	$\Delta A = \left(\vec{F}\Delta\vec{r}\right)$	Работа	$\Delta A = \left(\vec{M}\Delta\vec{\varphi}\right)$
Мощность	$N = \left(\vec{F}\vec{\upsilon}\right)$	Мощность	$N = \left(\vec{M}\vec{\omega}\right)$
Кинетическая энергия	$E_{\text{K}} = \frac{m\upsilon^2}{2}$	Кинетическая энергия	$E_{\text{K}} = \frac{I\omega^2}{2}$

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

32. Экспериментальные предпосылки теории относительности

В 1727 г. Джеймс Брэдли пытался определить расстояния до звезд, наблюдая годичный *параллакс*[1]. Идею этого метода покажем для Полярной звезды. Астроном определяет направление на звезду сегодня и через полгода. За это время Земля переместится на расстояние, равное удвоенному радиусу орбиты. Направления на звезду, измеренные сегодня и через полгода, должны отличаться на угол 2δ, как это показано на рис. 32.1.

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{R}{r}. \tag{32.1}$$

Угол δ очень мал. Если его измерять в радианах, то $\operatorname{tg}\delta = \delta$. В этом случае расстояние до Полярной звезды:

$$r = \frac{R}{\delta}. \tag{32.2}$$

В течение года Полярная звезда движется для наблюдателя на Земле по окружности, все остальные звезды – по эллипсам. Измеряя максимальный угол смещения δ, можно определить расстояние до звезды.

> Расстояние до звезды, для которой параллакс составляет 1 угловую секунду, называется *парсеком*. Слово парсек – сокращение слов параллакс и секунда.

Измерения показали, что для всех звезд $\delta = 20{,}5''$. Следовательно, все звезды находятся от Солнца на одинаковом расстоянии, что абсурдно.

Объяснение предложил А. Эйнштейн. Представим себе капли дождя (рис. 32.2), падающие вниз с постоянной[2] скоростью $\upsilon_к$. Зонт

---

[1] Параллакс – это изменение видимого положения объекта относительно удаленного фона в зависимости от положения наблюдателя. Явление используется для определения расстояний в геодезии и в астрономии. На этом явлении основано бинокулярное зрение.

[2] Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости капли. Эта сила растет вместе с увеличением скорости и тем самым уменьшает ее ускорение. Спустя некоторое время ускорение уменьшается до нуля, и скорость становится постоянной.

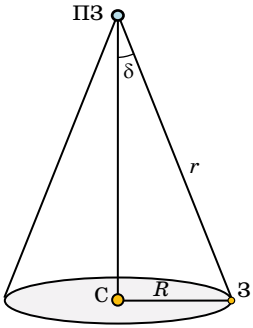
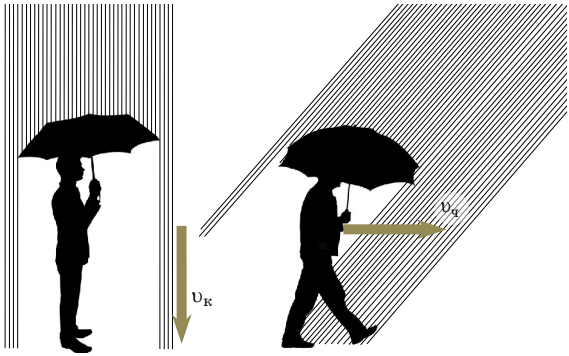


Рис. 32.1. Наблюдение параллакса: ПЗ – Полярная звезда, С – Солнце, З – Земля, R – радиус Земной орбиты, r – расстояние до Полярной звезды



$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\upsilon_ч}{\upsilon_к}.$$

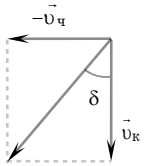


Рис. 32.2. Вертикальное и наклонное падение капель дождя

полностью спасает от дождя неподвижного человека. Для движущегося со скоростью $\upsilon_ч$ человека капли падают не вертикально, а наклонно под углом δ к вертикали и попадают на его одежду спереди. Угол отклонения δ называют *аберрацией*.

На рис. 32.3 показано возникновение звездной аберрации[1].

Свет, идущий от звезды в направлении вектора $\vec{c}$, регистрируется на Земле под углом δ к этому направлению.

$$\delta = \operatorname{tg}\delta = \frac{\upsilon_з}{c}. \qquad (32.3)$$

[1] Аберрация – это отклонение направления света, наблюдаемое движущимся приемником.

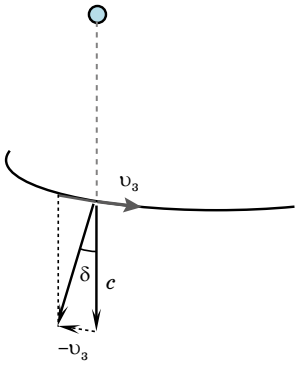


Рис. 32.3. Наблюдение звездных аберраций

В этой формуле $\upsilon_з = 3 \cdot 10^4$ м/с – скорость орбитального движения Земли, а $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

$$\delta = \frac{3 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^8} = 10^{-4} \text{ рад} = 20{,}5''.$$

> В своих наблюдениях Дж. Брэдли измерял не параллакс, а звездные аберрации.

Что же из этого следует? Аберрации δ для всех звезд одинаковые, скорость орбитального движения Земли одна и та же. Значит, скорость света, пришедшего от всех звезд, одинакова и равна $3 \cdot 10^8$ м/с. Но ведь все звезды двигаются относительно Земли с разными очень большими скоростями. Из преобразований Галилея для скоростей (28.3) следует, что скорость света должна складываться со скоростью источника. Однако этого не происходит.

> Скорость света не зависит от скорости движения испустившей его звезды.

Этот результат решительно противоречит классическому закону сложения скоростей. Приведенные рассуждения стали одним из фактов, хотя и не окончательным, которые привели А. Эйнштейна к формулировке его постулатов.

33. Постулаты Эйнштейна

После безуспешных поисков светоносного эфира, опираясь на экспериментальные данные, А. Эйнштейн сформулировал два постулата, на которых построил специальную теорию относительности.

1. Скорость света в вакууме не зависит от выбора инерциальной системы отсчета и всегда равна $c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ м/с.

2. Все физические процессы протекают одинаково для наблюдателей в любой инерциальной системе отсчета.

Первый из этих постулатов противоречит преобразованиям Галилея для скоростей (28.3), однако подтверждается астрономическими наблюдениями и специально проведенными оптическими экспериментами.

Для проведения точных измерений нужно обязательно синхронизовать часы у различных наблюдателей в одной инерциальной системе отсчета. Мы привыкли к синхронизации часов по сигналам точного времени, передаваемым по радио и телевидению в начале каждого часа. В нашей обычной жизни такой точности бывает достаточно. Однако, если наблюдатели находятся очень далеко от излучающей антенны или синхронизацию нужно провести с точностью до микросекунд, или даже наносекунд, такой способ не годится. Сигнал идет от источника до наблюдателя некоторое время, и часы этого наблюдателя после завершения процедуры будут запаздывать на это время по отношению к «главным» часам. Опишем процедуру синхронизации для двух или несколько наблюдателей, находящихся на большом расстоянии друг от друга. Показания всех часов после синхронизации должны совпадать с показаниями часов первого наблюдателя.

Каждый наблюдатель i до начала процедуры измеряет расстояние s_i от себя до первого наблюдателя и вычисляет время задержки сигнала:

$$\Delta t_i = \frac{s_i}{c}. \tag{33.1}$$

В заранее согласованное время t_0 первый наблюдатель отправляет радиосигнал или световой сигнал. Каждый наблюдатель запускает свои часы по принятому сигналу, введя соответствующую коррекцию:

$$t_i = t_0 + \Delta t_i. \tag{33.2}$$

После этой процедуры часы всех наблюдателей в инерциальной системе отсчета показывают одно и то же время.

Если кто-то из наблюдателей не знает своего расстояния s_i до источника точного времени, то он может в момент прихода к нему сигнала запустить часы и тут же послать первому наблюдателю ответный сигнал. Первый наблюдатель примет ответ через время τ_i и сообщит эту задержку i-му наблюдателю. После этого часы i-го наблюдателя переводятся вперед на:

$$\Delta t_i = \frac{\tau_i}{2}. \qquad (33.3)$$

34. Преобразования Лоренца

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета, одна из которых – K – покоится (ее называют *лабораторной*), а вторая –K' – движется относительно нее со скоростью $\vec{\upsilon}$ вдоль оси x (ее называют *движущейся*). Направления всех координатных осей показаны на рис. 34.1. В начальный момент времени координатные оси систем совпадали.

Обе системы отсчета инерциальные, и мы всегда можем переопределить условия: считать систему K' лабораторной, а систему K движущейся относительно нее с той же скоростью, но в обратном направлении.

Предположим, что в некоторой точке с координатами x, y, z в момент времени t происходит событие. В системе K' это событие происходит в точке с координатами x', y', z'в момент времени t'. Необходимо связать координаты и время в движущейся и в лабораторной системах отсчета.

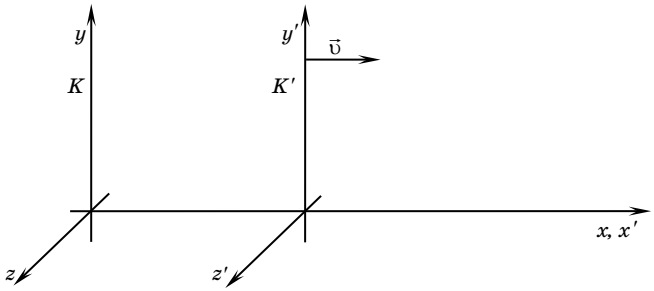


Рис. 34.1. Две инерциальные системы отсчета

Поскольку плоскости $y = 0$ и $y' = 0$ совпадают, координаты y и y' должны обращаться в ноль одновременно. Это обозначает, что:

$$y = \alpha y'.$$

Положив, что система K' неподвижна, а система K движется относительно нее со скоростью υ в обратном направлении оси x, мы получим аналогичное условие, записанное наоборот:

$$y' = \alpha y.$$

Из второго постулата Эйнштейна следует, что коэффициент α в обеих формулах одинаковый. Это возможно лишь при:

$$\alpha = \pm 1.$$

Знак «+» отвечает одинаковому направлению осей y и y'. Знак «−» противоположному. На рис. 34.1 оси направлены одинаково, поэтому:

$$y' = y. \tag{34.1}$$

Абсолютно аналогично получаем для координат z и z':

$$z' = z. \tag{34.2}$$

Формулы (34.1) и (34.2) свидетельствуют о том, что координаты y, y', z и z' не зависят от x, x', t и t'. Значит, справедливо и обратное: x, x', t и t' не зависят от y, y', z и z'. Координата x может зависеть только от x' и t'. Поскольку в начальный момент времени $t = 0$ начала координат обеих систем совпадали:

$$x' = -\upsilon t'.$$

Координата x обращается в ноль только тогда, когда выполняется написанное выше условие. Из этого следует, что координата x и выражение $x' + \upsilon t'$ связаны друг с другом постоянным множителем γ:

$$x = \gamma(x' + \upsilon t'). \tag{34.3}$$

Повторим рассуждения и свяжем координату x' с x и t. Поскольку в начальный момент времени t' начала координат обеих систем совпадали:

$$x' = +\upsilon t'.$$

Знак «+» определяется направлениями оси x' и скорости υ относительно системы отсчета K. Координата x' обращается в ноль только

при выполнении написанного условия. Значит, координата x' и выражение $x-\upsilon t$ связаны друг с другом постоянным множителем γ. Из второго постулата Эйнштейна следует, что этот коэффициент будет тем же, что и в формуле (34.3):

$$x' = \gamma(x - \upsilon t). \tag{34.4}$$

Теперь предположим, что в начальный момент времени $t = t' = 0$, когда начала координат обеих систем совпадали, в точке $x = x' = 0$ произошла вспышка. В системе K в момент времени t световая волна достигает координаты $x = ct$. В системе K' в момент времени t' эта же волна достигает координаты $x' = ct'$. Подставим эти координаты x' и x в формулы (34.3) и (34.4):

$$ct = \gamma(ct' + \upsilon t') = \gamma(c+ \upsilon)t';$$

$$ct' = \gamma(ct - \upsilon t) = \gamma(c - \upsilon)t.$$

Умножим эти выражения друг на друга: левую часть на левую, а правую – на правую:

$$c^2tt' = \gamma^2\left(c+\upsilon\right)\left(c-\upsilon\right)tt'; \;\; \Rightarrow \;\; c^2 = \gamma^2\left(c^2-\upsilon^2\right);$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{c^2-\upsilon^2}{c^2} = 1-\frac{\upsilon^2}{c^2}; \;\; \Rightarrow \;\; \gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}}.$$

Если координатные оси x и x' направлены в одну сторону, то в этой формуле будет знак «+», если же направления этих осей противоположные, то в формуле будет знак «–». В случае, показанном на рис. 31.1, будет знак «+». Подставим коэффициент γ в формулы (34.4) и (34.3) и получим прямые и обратные преобразования для координат x и x':

$$x' = \frac{x-\upsilon t}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}}; \tag{34.5}$$

$$x = \frac{x'+\upsilon t'}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}}. \tag{34.6}$$

Квадратный корень, стоящий в знаменателях, в дальнейшем для краткости будем называть *релятивистским корнем*.

Домножим выражение (34.5) на релятивистский корень, а выражение (34.6) на релятивистский корень в квадрате и преобразуем:

$$x'\sqrt{1-(\upsilon/c)^2} = x - \upsilon t; \quad \Downarrow$$

$$\left(1-(\upsilon/c)^2\right)x = x'\sqrt{1-(\upsilon/c)^2} + \upsilon t'\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}; \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x - x(\upsilon/c)^2 = x - \upsilon t + \upsilon t'\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}; \quad \Rightarrow$$

$$x(\upsilon/c)^2 = \upsilon t - \upsilon t'\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}; \quad \frac{x\upsilon}{c^2} = t - t'\sqrt{1-(\upsilon/c)^2};$$

$$t' = \frac{t - \upsilon x/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}. \qquad (34.7)$$

Теперь домножим выражение (34.6) на релятивистский корень, а выражение (34.5) на релятивистский корень в квадрате и после аналогичных преобразований получим:

$$t = \frac{t' + \upsilon x'/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}. \qquad (34.8)$$

Соберем все полученные в этой главе формулы в табл. 4:

– координаты и время оказались завязанными друг с другом;

– время в различных инерциальных системах отсчета течет поразному;

– поперечные координаты для наблюдателей из разных инерциальных систем отсчета одинаковы.

Таблица 4

Преобразования Лоренца

Прямые преобразования Лоренца		Обратные преобразования Лоренца	
$x' = \dfrac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}};$	(34.5)	$x = \dfrac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}.$	(34.6)
$y' = y;$	(34.1)	$y = y';$	(34.1)
$z' = z;$	(34.2)	$z = z';$	(34.2)
$t' = \dfrac{t - \upsilon x/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}.$	(34.7)	$t = \dfrac{t' + \upsilon x'/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}.$	(34.8)

35. Следствия из преобразований Лоренца

35.1. Относительность одновременности

Два события, которые для наблюдателя в системе K' происходят одновременно, но в разных точках[1] ($\Delta t' = 0$, но $\Delta x' \neq 0$), для наблюдателя в системе K происходят не одновременно:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \upsilon \Delta x' / c^2}{\sqrt{1 - (\upsilon/c)^2}} = \frac{0 + \upsilon \Delta x' / c^2}{\sqrt{1 - (\upsilon/c)^2}} = \frac{\upsilon \Delta x'}{c^2 \cdot \sqrt{1 - (\upsilon/c)^2}} \neq 0; \qquad \Delta t \neq 0. \quad (35.1)$$

Проиллюстрируем этот результат на качественном примере. Рассмотрим вагон, который движется с очень большой скоростью υ. Спереди и сзади вагона есть двери, которые открываются нажатием на кнопку в середине этого вагона. Сигнал от кнопки к дверям идет со скоростью света.

Если процесс открывания дверей рассматривать в системе отсчета, связанной с вагоном, то одинаковые расстояния ℓ_1 и ℓ_2 на рис. 35.1 будут пройдены за одно и то же время. Двери в системе отсчета, связанной с вагоном (в системе K'), откроются одновременно.

Теперь рассмотрим открывание дверей в системе отсчета, связанной с землей (рис. 35.2). Задняя дверь бежит навстречу сигналу, а передняя убегает от него. Поэтому задняя дверь откроется раньше передней. Те же события в системе отсчета K, связанной с землей, происходят не одновременно.

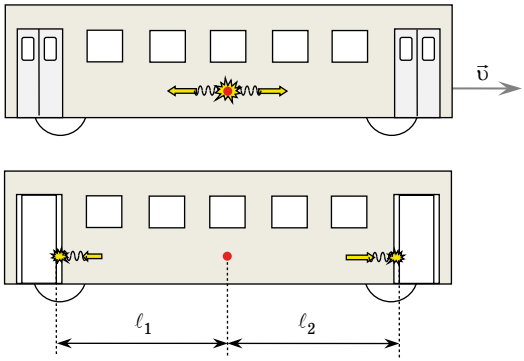


Рис. 35.1. Одновременное открывание дверей относительно вагона

[1] Если бы два события происходили одновременно в одной точке, то это было бы одно событие.

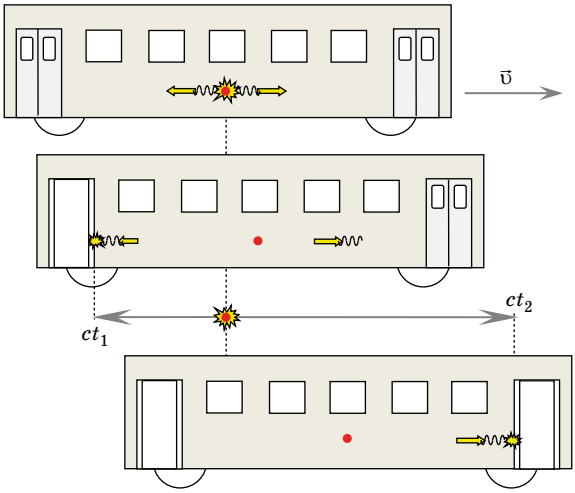


Рис. 35.2. Неодновременное открывание дверей относительно земли

Два события – открывание передней и задней дверей – происходят одновременно в системе отсчета, связанной с вагоном, и не одновременно в системе отсчета, связанной с землей. Одновременность относительна.

35.2. Сокращение продольных размеров быстро движущихся тел

Пусть тело, неподвижное в системе K' (рис. 34.1), имеет в этой системе отсчета длину ℓ_0. Эта величина называется *собственной длиной* тела. Она равна разности координат:

$$\ell_0 = x'_2 - x'_1 = \Delta x'. \qquad (35.2)$$

Заметим, что координаты x'_1 и x'_2 можно измерять в разные моменты времени, поскольку тело покоится в системе отсчета K'.

Чему будет равна длина тела, измеренная в лабораторной системе отсчета K на рис. 34.1? Для этого нужно измерить координаты x_1 и x_2 концов тела:

$$\ell = x_2 - x_1 = \Delta x. \qquad (35.3)$$

Измерения этих координатнужно проводить в один и тот же момент времени по часам в лабораторной системе отсчета K:

$$t_1 = t_2; \qquad \Delta t = 0. \tag{35.4}$$

Это условие соблюсти очень сложно. Казалось бы, сам собой напрашивается простой способ – сфотографировать движущееся тело на фоне неподвижной линейки. На рис. 35.3 показана такая попытка сфотографировать движущийся поезд на фоне неподвижных рельсов и шпал.

Скорее всего, на снимке будут видны все вагоны и, возможно, удастся сосчитать количество шпал под ними. Тем самым можно найти длину поезда во время движения. Описанный метод применим для поезда, двигающегося с обычной скоростью.

Дело обстоит иначе для объекта, двигающегося с очень большой скоростью, сравнимой со скоростью света. Поскольку расстояния от камеры до начала поезда и от камеры до его хвоста разные ($s_1 > s_2$), свет из этих точек до фотоаппарата идет разное время. Весь свет, попавший на матрицу, регистрируется одновременно. Значит, фотоаппарат фиксирует изображение начала и хвоста поезда, испущенные не одновременно. Когда нос поезда находится в точке x_2, сигнал от хвоста уже идет к фотоаппарату, а сам же хвост находится правее точки x_1. Разность координат x_2 и x_1 оказывается больше длины поезда.

Как же корректно определить длину очень быстро движущегося поезда? А. Эйнштейн предлагает вдоль оси x расположить большое количество наблюдателей, каждого из которых снабдить часами. Все часы должны быть синхронизированы. В некоторый момент времени два «счастливчика» из наблюдателей, напротив которых оказались начало и конец поезда, измеряют соответствующие координаты x_2 и x_1. Существенно, что эти измерения проводятся одновременно, как этого требует выражение (35.4). Запишем

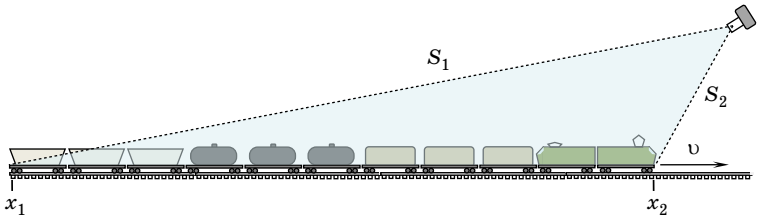


Рис. 35.3. Измерение длины поезда по фотографии

преобразование Лоренца (34.5) для координаты x в виде приращения:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}.$$

Принимая во внимание обозначения (35.2), (35.3) и то, что $\Delta t = 0$:

$$\ell_0 = \frac{\ell - \upsilon \cdot 0}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}; \quad \Rightarrow$$

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1-(\upsilon/c)^2}. \qquad (35.5)$$

> В движущейся системе отсчета продольные размеры тела сокращаются. Поперечные размеры тела не меняются.

В формуле (35.5) ℓ_0 – собственная длина тела, то есть длина, измеренная в той системе отсчета, относительно которой тело покоится.

> Собственная длина всегда максимальна.

Заметим, что если определять длину движущегося предмета, как это показано на рис. 35.3, то на эффект сокращения длины наложится эффект видимого удлинения предмета, описанный в комментариях к этому рисунку. В результате на фотографии оба эффекта компенсируют друг друга. Мы ничего не увидим. То же самое относится к определению длины предмета глазом. Мы измерим координаты разных концов тела в разное время и эффекта сокращения длины не увидим.

35.3. Замедление хода часов в быстро движущихся системах отсчета

Рассмотрим два события, которые происходят в системе отчета K' с некоторым интервалом времени $\Delta t'$. Поскольку тело неподвижно относительно этой системы отсчета, события происходят в одной и той же точке:

$$x'_1 = x'_2, \quad \Rightarrow \quad \Delta x' = 0. \qquad (35.6)$$

В лабораторной системе отсчета K эти события происходят в разных точках $\Delta x \neq 0$ и разделены промежутком времени Δt.

Запишем обратное преобразование Лоренца (34.8) для промежутка времени Δt:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \upsilon \Delta x' / c^2}{\sqrt{1 - (\upsilon / c)^2}}.$$

Обозначим длительность промежутка времени в лабораторной системе отсчета символом $\tau = \Delta t$, а в штрихованной системе отсчета, где тело неподвижно, – символом $\tau_0 = \Delta t'$. Учитывая условие (35.6), получим формулу:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - (\upsilon / c)^2}}. \qquad (35.7)$$

> В движущейся системе отсчета время течет медленнее.

В этой формуле τ_0 – собственное время, то есть время, измеренное в той системе отсчета, относительно которой тело покоится.

> Собственное время всегда минимально.

Формулы (35.5) и (35.7) интуитивно кажутся сомнительными, а потому требуют экспериментальной проверки. Их удалось подтвердить еще при жизни Эйнштейна в наблюдениях за *мюонами*. Эти частицы возникают на высотах 20–30 км при взаимодействии космического излучения с нижними слоями стратосферы. Они нестабильны, их время жизни составляет $\tau_0 = 2{,}1 \cdot 10^{-6}$ с. Казалось бы, что даже двигаясь со скоростью света, частицы могут пролететь только расстояние:

$$\ell = c\tau_0 = 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-6} = 630 \text{ м}.$$

В действительности эти частицы регистрируются на поверхности Земли, то есть пролетают расстояние не менее 20 км. Как это возможно?

Мюоны в стратосфере возникают с очень большой кинетической энергией, то есть с очень большой скоростью. Среди них есть, например, такие, которые летят со скоростью $\upsilon = 0{,}9998 \cdot c$. Время

жизни такой частицы для наблюдателей на Земле увеличивается в 50 раз:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = \frac{2{,}1\cdot 10^{-6}}{\sqrt{1-0{,}9998^2}} = \frac{2{,}1\cdot 10^{-6}}{\sqrt{1-0{,}9996}} = \frac{2{,}1\cdot 10^{-6}}{\sqrt{0{,}0004}} = \frac{2{,}1\cdot 10^{-6}}{0{,}02} \approx 10^{-4}\,\text{с}.$$

За это время частица может долететь до поверхности Земли:

$$\ell = \upsilon\tau = 0{,}9998c\tau \approx 30\ \text{км}.$$

Теперь рассмотрим ту же частицу в системе K', где время жизни равно собственному времени жизни τ_0. В этой системе отсчета частица покоится, а навстречу ей со скоростью $\upsilon = 0{,}9998 \cdot c$ летит Земля. При этой скорости первоначальное расстояние до Земли $\ell_0 = 30$ км сокращается до 600 м:

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-(\upsilon/c)^2} = 3\cdot 10^4\sqrt{1-0{,}9998^2} =$$
$$= 3\cdot 10^4\sqrt{1-0{,}9996} = 3\cdot 10^4\cdot 0{,}02 = 600\ \text{м}.$$

За собственное время жизни τ_0 частица может пролететь такое расстояние.

Объяснение поведения мюонов опирается на следствия из преобразований Лоренца (35.5), (35.7) и тем самым подтверждает их.

Эффект замедления времени (35.7) наряду с гравитационным замедлением учитывается в спутниковых системах навигации. Например, в GPS ход часов на спутниках скорректирован по сравнению с часами на поверхности Земли на 38 мкс в день.

36. Закон сложения скоростей

Снова рассмотрим две инерциальные системы отсчета, одна из которых – K, покоится, а вторая – K' движется относительно нее со скоростью $\vec{\upsilon}$ вдоль оси x. Направления всех координатных осей показаны на рис. 36.1. В начальный момент времени координатные оси систем совпадали.

Некое тело перемещается относительно штрихованной системы отсчета K' со скоростью $\vec{u}'$ в направлении оси x'. Нужно найти скоростью $\vec{u}$ этого тела относительно лабораторной системы отсчета K.

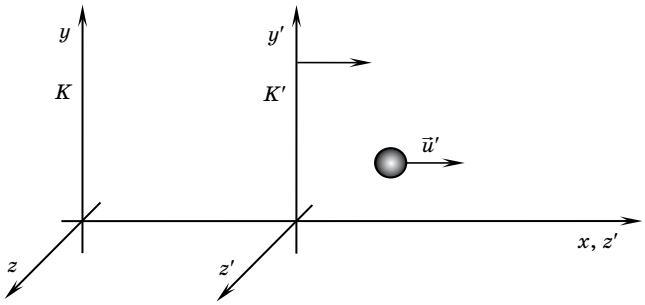


Рис. 36.1. Две инерциальные системы отсчета

Продифференцируем обратные преобразования Лоренца (34.6) и (34.8).

$$dx = \frac{dx' + \upsilon dt'}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = \frac{u'_x dt' + \upsilon dt'}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = \frac{(u'_x + \upsilon)dt'}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}; \qquad (36.1)$$

$$dt = \frac{dt' + \upsilon dx'/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = \frac{dt' + \upsilon u'_x dt'/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = \frac{\left(1 + \upsilon u'_x/c^2\right)dt'}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}. \qquad (36.2)$$

Поделим выражение (36.1) на (36.2) и получим скорость в лабораторной системе отсчета:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(u'_x + \upsilon)dt}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} \frac{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}{\left(1 + \upsilon u'_x/c^2\right)dt};$$

$$u_x = \frac{\upsilon + u'_x}{1 + \upsilon u'_x/c^2}. \qquad (36.3)$$

Мы получили релятивистский закон сложения скоростей. Отметим, что u_x и u'_x в этой формуле – проекции скорости на ось. Они могут быть как положительными, так и отрицательными.

Для поперечных компонент скорости u_y и u_z выражение будет сложнее, в нем будут присутствовать сразу и продольная, и поперечная компоненты скорости.

Формула, аналогичная (36.3), получится, если рассматривать два объекта, показанных на рис. 36.2, двигающихся в лабораторной

Рис. 36.2. Сближение двух объектов с большими скоростями

системе отсчета вдоль оси x со скоростями υ_1 и υ_2. В таком случае υ – скорость сближения этих объектов:

$$\upsilon = \frac{\upsilon_1 \pm \upsilon_2}{1 \pm \upsilon_1\upsilon_2 / c^2}. \qquad (36.4)$$

Знак «+» в этой формуле, если скорости направлены так, как показано на рисунке; знак «–», если υ_2 имеет противоположное направление.

Пример 36.1. Найти скорость сближения космических кораблей, которые в лабораторной системе отсчета имеют скорости $\upsilon_1 = \upsilon_2 = c/2$, направленные навстречу друг другу:

$$\upsilon = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{1 + \dfrac{\upsilon_1\upsilon_2}{c^2}} = \frac{0{,}5 \cdot c + 0{,}5 \cdot c}{1 + \dfrac{0{,}25 \cdot c^2}{c^2}} = \frac{c}{1 + 0{,}25} = 0{,}8 \cdot c.$$

Скорость сближения объектов оказалась меньше скорости света. Постараемся выбрать такие условия, чтобы скорость сближения все-таки оказалась больше, чем c.

Пример 36.2. Найти скорость сближения космических кораблей, которые в лабораторной системе отсчета имеют скорости $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0{,}9\,c$, направленные навстречу друг другу:

$$\upsilon = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{1 + \dfrac{\upsilon_1\upsilon_2}{c^2}} = \frac{0{,}9 \cdot c + 0{,}9 \cdot c}{1 + \dfrac{0{,}81 \cdot c^2}{c^2}} = \frac{1{,}8c}{1 + 0{,}81} = \frac{180}{181} \cdot c.$$

Даже при таких скоростях космических кораблей скорость сближения оказалась меньше скорости света. Коэффициент 180/181 красноречиво свидетельствует о том, что при любых скоростях υ_1 и υ_2 результат окажется меньше скорости света. Сколько ни добавляй к скорости объекта – все равно скорости света не достигнешь.

> Никакое тело не может достигнуть скорости света.

Пример 36.3. Космический корабль движется со скоростью υ в лабораторной системе отсчета, навстречу ему идет световой сигнал со скоростью c. Найти скорость сближения корабля и сигнала:

$$\upsilon = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{1 + \dfrac{\upsilon_1 \upsilon_2}{c^2}} = \frac{\upsilon + c}{1 + \dfrac{\upsilon c}{c^2}} = \frac{\left(\dfrac{\upsilon}{c} + 1\right) c}{1 + \dfrac{\upsilon}{c}} = c.$$

Этого и следовало ожидать. Свет в любой инерциальной системе отсчета движется со скоростью c. В этом состоит первый постулат Эйнштейна.

37. Интервал

Мы убедились, что длина отрезка и длительность промежутка времени не являются инвариантами, то есть зависят от того, в какой системе отсчета их измерять. А есть ли в специальной теории относительности величины, которые во всех инерциальных системах отсчета одинаковые? Одним из таких инвариантов является *интервал* между двумя событиями.

Пусть в лабораторной системе отсчета происходят два события: первое – в момент времени t_1 в точке с координатами x_1, y_1, z_1; второе – в момент времени t_2 в точке с координатами x_2, y_2, z_2. Интервалом между этими событиями называется величина:

$$\Delta S^2 = \left(c\Delta t\right)^2 - \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right). \qquad (37.1)$$

Запишем интервал между теми же событиями в подвижной штрихованной системе отсчета:

$$\Delta S'^2 = \left(c\Delta t'\right)^2 - \left(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2\right). \qquad (37.2)$$

Из преобразований Лоренца (34.7), (34.5), (34.1), (34.2) следует:

$$c\Delta t' = \frac{c\Delta t - \upsilon \Delta x/c}{\sqrt{1 - \left(\upsilon/c\right)^2}} = \frac{c\Delta t - \Delta x\left(\upsilon/c\right)}{\sqrt{1 - \left(\upsilon/c\right)^2}};$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1 - \left(\upsilon/c\right)^2}}; \quad \Delta y' = \Delta y; \quad \Delta z' = \Delta z.$$

Подставляем написанное в (37.2) и преобразуем:

$$\Delta S'^2 = \frac{\left(c\Delta t - \Delta x\left(\upsilon/c\right)\right)^2}{1-\left(\upsilon/c\right)^2} - \frac{\left(\Delta x - \upsilon\Delta t\right)^2}{1-\left(\upsilon/c\right)^2} - \Delta y^2 - \Delta z^2 =$$

$$= \frac{\left(c\Delta t\right)^2 - 2\Delta t\Delta x\upsilon + \left(\Delta x\right)^2\left(\upsilon/c\right)^2 - \left(\Delta x\right)^2 + 2\upsilon\Delta t\Delta x - \left(\upsilon\Delta t\right)^2}{1-\left(\upsilon/c\right)^2} - \Delta y^2 - \Delta z^2 =$$

$$= \frac{\left(c\Delta t\right)^2 - \left(\upsilon\Delta t\right)^2 - \left(\Delta x\right)^2\left(1-\left(\upsilon/c\right)^2\right)}{1-\left(\upsilon/c\right)^2} - \Delta y^2 - \Delta z^2 =$$

$$= \frac{\left(c\Delta t\right)^2\left(1-\left(\upsilon/c\right)^2\right) - \left(\Delta x\right)^2\left(1-\left(\upsilon/c\right)^2\right)}{\left(1-\left(\upsilon/c\right)^2\right)} - \Delta y^2 - \Delta z^2 =$$

$$= \frac{\left(\left(c\Delta t\right)^2 - \left(\Delta x\right)^2\right)\left(1-\left(\upsilon/c\right)^2\right)}{\left(1-\left(\upsilon/c\right)^2\right)} - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \left(c\Delta t\right)^2 - \left(\left(\Delta x\right)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right).$$

Интервал между двумя событиями *инвариантен* $\Delta S'^2 = \Delta S^2$.

Интервал состоит из двух частей: временно́й и координатной. Если временна́я часть больше координатной, то есть $\Delta S^2 > 0$, а ΔS – вещественное число, то такой интервал называется *времениподобным*. Можно выбрать такую систему отсчета, в которой этот интервал сведется к измерению промежутка времени между двумя событиями, происходящими в одной точке.

> События, связанные времениподобным интервалом, ни в какой системе отсчета не могут происходить одновременно.

> Если два события связаны друг с другом времениподобным интервалом, то одно из них может быть (а может и не быть) следствием другого.

Если координатная часть больше временной, $\Delta S^2 < 0$, а ΔS – мнимое число, то такой интервал называется *пространственноподобным*. Можно выбрать такую систему отсчета, в которой этот

интервал сведется к измерению расстояния между двумя одновременными событиями.

> События, связанные пространственноподобным интервалом, ни в какой системе отсчета не могут происходить в одной точке.

> Если два события связаны пространственноподобным интервалом, то ни одно из них не может быть следствием другого.

Еще раз посмотрим на формулу (37.1). Время между событиями и расстояние между ними входят в нее с разными знаками. В классической физике и время, и расстояние – инварианты. В теории относительности Эйнштейна четыре переменных x, y, z и ict абсолютно одинаково входят в формулу (37.1):

$$\Delta S^2 = -\left(\left(ic\Delta t\right)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right). \qquad (37.4)$$

> Таким образом, можно считать, что наше пространство четырехмерно. Кроме декартовых координат x, y, z есть еще мнимая координата ict, связанная со временем.

38. Релятивистская динамика

Импульс в классической физике задается выражением (8.1), которое перепишем в следующем виде:

$$\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Проблема в том, что такой импульс *не будет сохраняться*. Сохраняться он будет в том случае, если числитель дроби измерять в лабораторной системе отсчета, а время взять собственное:

$$\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{dt'}.$$

Время должно измеряться в лабораторной системе отсчета. Из формулы (35.7) следует:

$$dt' = dt\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2};$$

$$\vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

В формуле для импульса появился релятивистский корень в знаменателе. Обычно его связывают с массой. Получается, что инертная масса зависит от выбора системы отсчета. Массу покоящегося тела обозначают символом m_0 и называют *массой покоя*. Релятивистскую массу обозначают символом m:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}. \qquad (38.1)$$

Масса покоя всегда минимальна.

Скорректируем обозначения $m_0 \to m$ и перепишем формулу для импульса:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}. \qquad (38.2)$$

Импульс в теории относительности можно записать так же, как и в классической механике (8.1):

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}, \qquad (38.3)$$

но понятие массы при этом наполняется новым содержанием.

Возведем левую и правую части выражения (37.1) в квадрат и преобразуем:

$$m^2 = \frac{m_0^2}{1-(\upsilon/c)^2}; \qquad m^2\left(1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2\right) = m_0^2; \qquad m^2\frac{c^2-\upsilon^2}{c^2} = m_0^2;$$

$$m^2c^2 - m^2\upsilon^2 = m_0^2c^2. \qquad (38.4)$$

Продифференцируем последнее выражение, учитывая, что масса покоя и скорость света – константы:

$$d\left(m^2c^2\right) - d\left(m^2\upsilon^2\right) = d\left(m_0^2c^2\right); \qquad c^2dm^2 - d(m\upsilon)^2 = 0;$$

$$2mc^2dm - 2m\upsilon d(m\upsilon) = 0; \qquad c^2dm - \upsilon d(m\upsilon) = 0;$$

$$d\left(mc^2\right) = \upsilon d(m\upsilon). \qquad (38.5)$$

Справа в (38.5) стоит дифференциал кинетической энергии в классической механике. Учитывая (38.1), логично было бы считать, что и в релятивистской механике это тоже дифференциал кинетической энергии:

$$dE_{\text{K}} = d\left(mc^2\right).$$

Если дифференциалы двух величин равны, то сами величины равны друг другу с точностью до константы:

$$E_{\text{K}} = mc^2 + B.$$

Найдем константу B из условия: при $\upsilon = 0$, $E_{\text{K}} = 0$, а $m = m_0$:

$$0 = m_0c^2 + B; \quad \Rightarrow \quad B = -m_0c^2.$$

Имеем окончательное выражение для кинетической энергии:

$$E_{\text{K}} = mc^2 - m_0c^2. \tag{38.6}$$

Замечания:

1. Выражение (12.9) в релятивистской механике не справедливо, даже если массу считать релятивистской.

2. При $\upsilon \to 0$ выражение (38.6) преобразуется в $E_{\text{K}} = \dfrac{m_0\upsilon^2}{2}$.

Еще раз посмотрим на выражение для кинетической энергии (38.6). Оно является разностью двух величин. Одну из них называют полной энергией тела, а вторую – энергией покоя.

$$E = mc^2; \tag{38.7}$$

$$E_0 = m_0c^2. \tag{38.8}$$

> Энергия покоя – это минимальная энергия, которую нужно затратить для «рождения» частицы.

Полная энергия в теории относительности включает в себя энергии: кинетическую, потенциальную и покоя. Потенциальной энергией обычно пренебрегают.

Домножим выражение (38.4) слева и справа на c^2 и получим связь полной энергии с энергией покоя и импульсом:

$$m^2c^4 - p^2c^2 = m_0^2c^4;$$

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2. \tag{38.9}$$

Последняя формула очень продуктивна при решении задач. Она работает даже для частиц с нулевой массой покоя.

39. Инварианты теории относительности

Инвариантами называются величины, которые одинаковы для наблюдателей в различных инерциальных системах отсчета.

1. Скорость света в вакууме – c.
2. Интервал между событиями – ΔS.
3. Собственная длина – ℓ_0.
4. Собственное время – τ_0.
5. Масса покоя – m_0.
6. Энергия покоя – E_0.
7. Электрический заряд – q.
8. Количество вещества в молях – ν.
9. Безразмерные величины, обозначающие количество чего-либо.

40. Принцип эквивалентности в теории относительности

Принцип эквивалентности в классической физике состоит в равенстве инертной и гравитационной масс. А. Эйнштейн развил этот принцип для описания гравитационного поля. Он сделал утверждение, что действие силы гравитации $m\vec{g}$ эквивалентно действию силы инерции $-m\vec{a}_0$ в неинерциальной системе отсчета, как это показано на рис. 40.1.

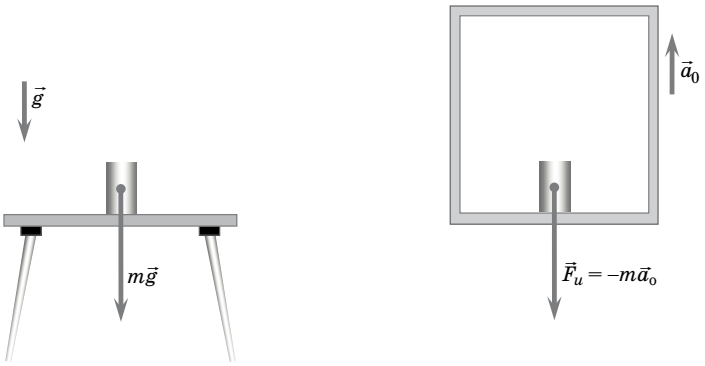


Рис. 40.1. Сила тяжести и сила инерции

В случае если ускорение лифта $\vec{a}_0 = -\vec{g}$, сила инерции, действующая на тело, будет в точности равна силе тяжести. Гравитационное поле, в котором находится тело, можно заменить, поместив тело в неинерциальную систему отсчета. Это утверждение называется *принципом эквивалентности* и является третьим постулатом Эйнштейна. На нем и на двух первых постулатах строится *общая теория относительности*.

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

41. Уравнение гармонических колебаний

Рассмотрим *пружинный маятник* (рис. 41.1). Груз массой m на пружине жесткостью k прикреплен к стене. Сила трения отсутствует.

Обозначим точку 0 – положение равновесия груза. Если груз на пружине оттянуть, деформировать пружину на величину x, то возникнет сила, возвращающая тело к положению равновесия. Проекция этой силы на ось равна:

$$F_x = -kx. \qquad (41.1)$$

В этой формуле k – жесткость; x – деформация пружины.

По *второму закону Ньютона* сумма всех приложенных к телу сил равна произведению массы тела на ускорение:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

Силы тяжести и реакции опоры компенсируют друг друга $m\vec{g} + \vec{N} = 0$. Поэтому сила упругости пружины – единственная не скомпенсированная сила, действующая на тело:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

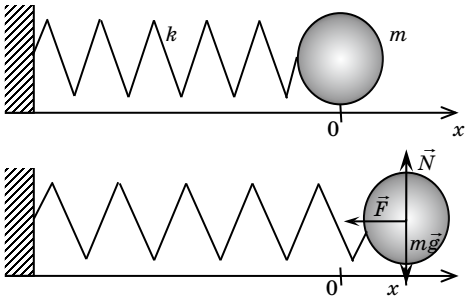


Рис. 41.1. Пружинный маятник

Спроектируем получившееся выражение на ось (*ox*), учитывая выражение (41.1) и рассматривая левую и правую части как функции времени, имеем:

$$ma_x(t) = -kx(t). \tag{41.2}$$

Ускорение – это вторая производная координаты по времени, поэтому:

$$m \cdot x''(t) + k \cdot x(t) = 0. \tag{41.3}$$

Вводим обозначение:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{41.4}$$

и получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний в каноническом виде:

$$x''(t) + \omega_o^2 \cdot x(t) = 0. \tag{41.5}$$

Решением этого уравнения является функция:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o), \tag{41.6}$$

в которой A – амплитуда колебаний, то есть максимальная по модулю деформация пружины; φ_o – начальная фаза. Эти величины могут быть найдены из начальных условий: начальной координаты x_o и начальной скорости υ_o. Выражение в скобках называется фазой колебаний. Она измеряется в радианах. Период колебаний пружинного маятника $T = 2\pi/\omega_o$, то есть с учетом (41.4):

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}. \tag{41.7}$$

Скорость – это производная от координаты по времени. Поэтому скорость маятника, совершающего гармонические колебания, равна:

$$\upsilon(t) = -\omega A \cdot \sin(\omega_o t + \varphi_o). \tag{41.8}$$

Получается, что скорость маятника меняется по гармоническому закону на той же частоте ω_o. Максимальная скорость равна:

$$\upsilon_m = A\omega_o.$$

Ускорение – это вторая производная от координаты по времени или первая производная от скорости по времени. Поэтому ускорение маятника, совершающего гармонические колебания, равно:

$$a(t) = -\omega A^2 \cdot \sin(\omega_o t + \varphi_o). \tag{41.9}$$

Получается, что ускорение маятника меняется по гармоническому закону на той же частоте ω_o. Максимальное ускорение равно:

$$a_m = A\omega_o^2.$$

Покажем, как по начальным условиям – x_o и υ_o найти амплитуду и начальную фазу колебаний:

$$x_o = x_{(t=0)} = A\cos(\omega_o \cdot 0 + \varphi_o) = A\cos\varphi_o;$$

$$x_o = A\cos\varphi_o. \qquad (41.10)$$

$$\upsilon_o = \upsilon_{(t=0)} = -A\omega_o \sin(\omega_o \cdot 0 + \varphi_o) = -A\omega_o \sin\varphi_o;$$

$$-\upsilon_o/\omega_o = A\sin\varphi_o. \qquad (41.11)$$

Возведем в квадрат левые и правые части (41.10), (41.11) и сложим их:

$$x_o^2 + \frac{\upsilon_o^2}{\omega_o^2} = A^2\left(\cos^2\varphi_o + \sin^2\varphi_o\right) = A^2;$$

$$A = \sqrt{x_o^2 + \frac{\upsilon_o^2}{\omega_o^2}}. \qquad (41.12)$$

Теперь поделим выражение (41.11) на выражение (41.10):

$$\frac{-\upsilon_o}{\omega_o x_o} = \frac{A\sin\varphi_o}{A\cos\varphi_o}; \qquad tg\varphi_o = \frac{-\upsilon_o}{\omega_o x_o}; \qquad (41.13)$$

Итак, мы выразили амплитуду A и начальную фазу φ_o колебаний через начальные условия x_o и υ_o. Функция (41.6) полностью определена, поставленная основная обратная задача динамики решена.

42. Условия возникновения колебаний

Гармонические колебания возникают в случае действия на тело силы вида (41.1):

$$F_x = -kx. \qquad (42.1)$$

В этом случае потенциальная энергия представляет собой квадратичную параболу:

$$E_{\text{П}} = \frac{1}{2} k x^2. \qquad (42.2)$$

На рис. 42.1 показаны и соответствующая сила, и соответствующая потенциальная энергия.

Если потенциальная энергия не является квадратичной параболой, но имеет минимум в положении равновесия, то сила является возвращающей, то есть направлена к положению равновесия. На рис. 42.2 показан подобный случай, когда шарик скатывается с одной наклонной плоскости и закатывается на другую. Движение шарика в этом случае периодическое, но оно происходит не по закону (41.6).

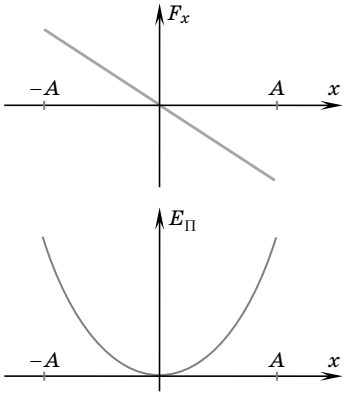


Рис. 42.1. Сила и потенциальная энергия при гармонических колебаниях

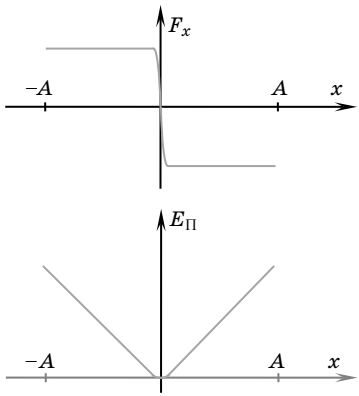


Рис. 42.2. Сила и потенциальная энергия при негармонических колебаниях

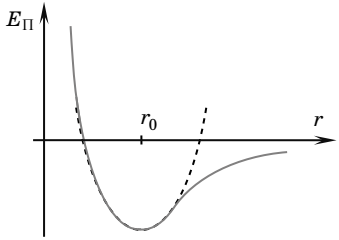


Рис. 42.3. Зависимость потенциальной энергии от расстояния

В данном случае возникают негармонические колебания.

На рис. 42.3 показана еще одна типичная зависимость потенциальной энергии от координаты.

При малых отклонениях от положения равновесия потенциальная энергия является квадратичной параболой, а при больших – заметно отличается от нее.

Малые колебания почти всегда являются гармоническими.

43. Энергия гармонических колебаний

Потенциальная энергия сжатой пружины равна:

$$E_{\text{П}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\omega_{\text{o}}t + \varphi_{\text{o}}\right). \qquad (43.1)$$

Кинетическая энергия движущегося маятника равна:

$$E_{\text{K}} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m{\upsilon_m}^2\sin^2\left(\omega_{\text{o}}t + \varphi_{\text{o}}\right) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\left(\omega_{\text{o}}t + \varphi_{\text{o}}\right).$$

Вспомним, что жесткость пружины, масса груза и частота собственных колебаний связаны соотношением (41.4) $\omega_{\text{o}} = \sqrt{k/m}$, и закончим выкладки для кинетической энергии:

$$E_{\text{K}} = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\left(\omega_{\text{o}}t + \varphi_{\text{o}}\right). \qquad (43.2)$$

Полная механическая энергия маятника равна сумме потенциальной и кинетической. Сложим их и получим:

$$E = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\omega_{\text{o}}t + \varphi_{\text{o}}\right) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2\left(\omega_{\text{o}}t + \varphi_{\text{o}}\right) = \frac{1}{2}kA^2. \qquad (43.3)$$

Выяснилось, что полная энергия – величина постоянная, что и следовало ожидать.

Найдем средние значения потенциальной и кинетической энергий. При этом учтем, что средние значения квадрата косинуса и квадрата синуса одинаковы и равны $^1/_2$:

$$\left\langle E_{\text{K}} \right\rangle = \frac{1}{2}kA^2\left\langle \sin^2\left(\omega_{\text{o}}t + \varphi_{\text{o}}\right)\right\rangle = \frac{1}{4}kA^2; \qquad (43.4)$$

$$\langle E_{\text{П}} \rangle = \frac{1}{2} kA^2 \left\langle \cos^2 \left(\omega_{\text{o}} t + \varphi_{\text{o}} \right) \right\rangle = \frac{1}{4} kA^2. \qquad (43.5)$$

Средние значения кинетической и потенциальной энергии равны друг другу.

44. Векторная диаграмма

Пусть материальная точка равномерно вращается с угловой скоростью ω_{o} против часовой стрелки по окружности с радиусом A, как это показано на рис. 44.1. Если в начальный момент времени угол поворота был φ_{o}, то вращения материальной точки будет происходить по закону:

$$\varphi(t) = \omega_{\text{o}} t + \varphi_{\text{o}}. \qquad (44.1)$$

Проекции конца вектора $\vec{A}$ на координатные оси будут равны:

$$x = A\cos\varphi; \qquad y = A\sin\varphi.$$

Учитывая (44.1), получаем два гармонических колебания, происходящих вдоль оси x и вдоль оси y одновременно:

$$x(t) = A\cos(\omega_{\text{o}} t + \varphi_{\text{o}});$$
$$y(t) = A\sin(\omega_{\text{o}} t + \varphi_{\text{o}}).$$

Одно равномерное вращение эквивалентно двум гармоническим колебаниям.

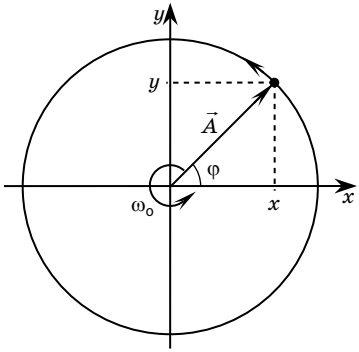


Рис. 44.1. Равномерное вращение точки по окружности

К тому же выводу можно прийти, используя комплексные числа. Запишем комплексное число в показательном виде:

$$z = A \cdot e^{i\varphi}.$$

Здесь A – модуль числа; φ – его фаза (угол между вещественной осью и направлением отрезка A). Если фаза меняется по закону (44.1), то:

$$z(t) = Ae^{i(\omega_o t + \varphi_o)}. \qquad (44.2)$$

Физический смысл имеет лишь проекция комплексного числа на вещественную ось:

$$x(t) = \mathrm{Re}\, z(t) = A \cdot \mathrm{Re}\left(e^{i(\omega_o t + \varphi_o)}\right) = A\cos\left(\omega_o t + \varphi_o\right).$$

Мы снова пришли к той же формуле (41.6). В некоторых случаях для удобства, наглядности и простоты пользуются формулой (44.2) вместо (41.6). В этой замене и заключается метод векторной диаграммы.

Метод векторных диаграмм

Гармоническое колебание маятника с амплитудой A на собственной частоте ω_0 заменяется равномерным вращением материальной точки против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0 по окружности с радиусом, равным амплитуде колебаний.

45. Физический и математический маятник

Физическим маятником называется абсолютно твердое тело, подвешенное на горизонтальной оси, не проходящей через центр масс. Расстояние от центра масс до оси обозначим буквой b.

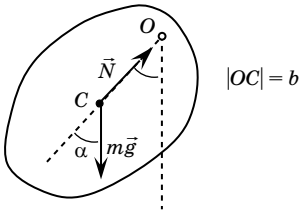


Рис. 45.1. Физический маятник

К физическому маятнику на рис. 45.1 приложены две силы: тяжести и взаимодействия с осью *O*. Момент первой из них относительно оси подвеса равен $M_1 = mgb \cdot \sin\alpha$. Момент силы N взаимодействия с осью равен нулю, поскольку сама сила направлена вдоль отрезка $[OC]$. По *второму закону Ньютона для вращательного движения*:

$$\sum \vec{M}_i = \vec{M}_{\text{тяж}} = I\vec{\varepsilon}, \qquad (45.1)$$

где I – момент инерции маятника относительно оси *O*; $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение. Поскольку момент силы тяжести стремится вернуть маятник к положению равновесия, в скалярном виде в проекции на направление оси вращения нужно поставить знак минус одной из этих величин:

$$I\varepsilon = -mgb \cdot \sin\alpha. \qquad (45.2)$$

Вспомним, что $\varepsilon(t) = \alpha''(t)$ и при малых углах отклонения $\sin\alpha = \alpha$:

$$\alpha''(t) + \frac{mgb}{I}\alpha(t) = 0. \qquad (45.3)$$

Вводим обозначение $\omega_o = \sqrt{mgb/I}$ (45.4)

и окончательно имеем $\alpha''(t) + \omega_o^2 \cdot \alpha(t) = 0.$ (45.5)

Мы получили уравнение, аналогичное (41.5), но не для смещения, а для угла поворота. От того, какой буквой обозначена искомая функция $x(t)$ или $\alpha(t)$, разумеется, ничего не зависит. Решение уравнения (45.5) будет таким же, как и для уравнения (41.5):

$$\alpha_{(t)} = A \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o). \qquad (45.6)$$

Физический маятник при малых углах отклонения совершает гармонические колебания с периодом $T = 2\pi/\omega_o$, то есть с учетом (45.4):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}. \qquad (45.7)$$

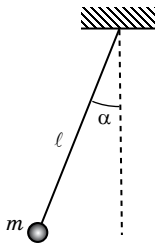


Рис. 45.2. Математический маятник

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити (рис. 45.2). Его можно рассматривать как частный случай физического маятника с $b = \ell$ и моментом инерции $I = m\ell^2$.

Сказанное обозначает, что математический маятник при малых углах отклонения совершает гармонические колебания с периодом:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \qquad (45.8)$$

Приведенной длиной физического маятника называют длину L такого математического, который колеблется с той же частотой:

$$L = \frac{I}{mb}. \qquad (45.9)$$

46. Затухающие колебания

Рассмотрим *пружинный маятник*, погруженный в вязкую среду. Считаем, что силы тяжести, Архимеда и реакции опоры компенсируют друг друга. Поэтому мы их не будем изображать на рис. 46.1. Трение скольжения о горизонтальную поверхность отсутствует.

На груз действует сила упругости пружины, возвращающая тело к положению равновесия. Проекция этой силы на ось x равна:

$$F_x = -kx. \qquad (46.1)$$

Кроме силы упругости пружины на тело действует сила сопротивления среды, то есть сила вязкого трения, которая направлена в сторону, противоположную направлению скорости:

$$F_c = c\upsilon. \qquad (46.2)$$

По *второму закону Ньютона* $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_c$. Учитывая, что $a(t) = x''(t)$, а $\upsilon(t) = x'(t)$, с учетом направления сил получаем:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0\,. \qquad (46.3)$$

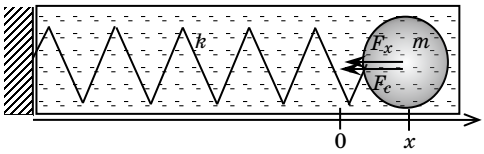


Рис. 46.1. Пружинный маятник в вязкой среде

Вводим новое обозначения $\beta = \dfrac{c}{2m}$, **(46.4)**

вспоминаем старое **(41.4)** $\omega_o = \sqrt{k/m}$ и получаем *дифференциальное уравнение затухающих колебаний* в каноническом виде:

$$x''(t) + 2\beta x'(t) + \omega_o^2 x(t) = 0. \quad (46.5)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$x(t) = e^{-\beta t} y(t). \quad (46.6)$$

Сначала найдем первую производную этой функции по правилу дифференцирования произведения:

$$x'(t) = \left(e^{-\beta t}\right)' y(t) + e^{-\beta t} y'(t);$$

$$x'(t) = e^{-\beta t}\left(y'(t) - \beta y(t)\right). \quad (46.7)$$

Продифференцируем это выражение еще раз:

$$x''(t) = \left(e^{-\beta t}\right)'\left(y'(t) - \beta y(t)\right) + e^{-\beta t}\left(y'(t) - \beta y(t)\right)' =$$

$$= e^{-\beta t}\left(-\beta y'(t) + \beta^2 y(t)\right) + e^{-\beta t}\left(y''(t) - \beta y'(t)\right);$$

$$x''(t) = e^{-\beta t}\left(y''(t) - 2\beta y'(t) + \beta^2 y(t)\right). \quad (46.8)$$

Подставим выражения **(46.6)**, **(46.7)** и **(46.8)** в уравнение **(46.5)**:

$$e^{-\beta t}\left(y''(t) - 2\beta y'(t) + \beta^2 y(t)\right) + 2\beta \cdot e^{-\beta t}\left(y'(t) - \beta y(t)\right) + \omega_o^2 \cdot e^{-\beta t} y(t) = 0;$$

$$e^{-\beta t}\left(y''(t) - 2\beta y'(t) + \beta^2 y(t) + 2\beta y'(t) - 2\beta^2 y(t) + \omega_o^2 y(t)\right) = 0;$$

$$e^{-\beta t}\left(y''(t) - \beta^2 y(t) + \omega_o^2 y(t)\right) = 0;$$

$$y''(t) + \left(\omega_o^2 - \beta^2\right) y(t) = 0. \quad (46.9)$$

Введем обозначение:

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} \quad (46.10)$$

и перепишем получившееся уравнение (46.9):

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0.$$

Мы снова получили уравнение (41.5), только для другой функции – *y (t)*. Решение такого уравнения нам уже известно:

$$y(t) = A_o \cos\left(\omega t + \varphi_o\right).$$

Подставляем эту функцию в (46.6) и получаем уравнения затухающих колебаний:

$$x_{(t)} = A_o e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_o). \qquad (46.11)$$

В этом уравнении ω – частота затухающих колебаний; φ_o –начальная фаза.

Произведение, стоящее перед косинусом в формуле (46.11), есть убывающая со временем амплитуда колебаний:

$$A(t) = A_o e^{-\beta t}. \qquad (46.12)$$

Затухающие колебания не являются гармоническими.

Частота затухающих колебаний ω меньше частоты собственных колебаний ω_o. Это видно из (46.10). Соответственно, период затухающих колебаний будет больше периода собственных незатухающих гармонических колебаний. На рис. 46.2 дано сравнение незатухающих и затухающих колебаний.

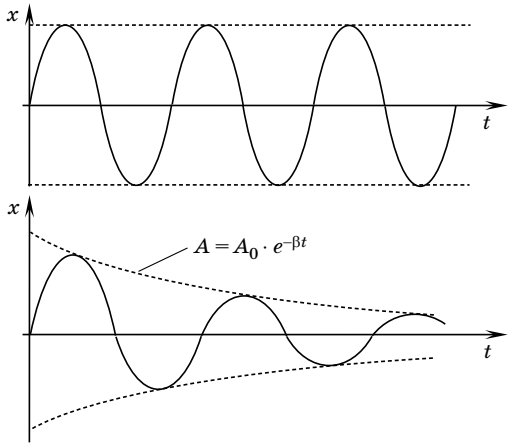


Рис. 46.2. Незатухающие и затухающие колебания

Рассмотрим функцию (46.11) и найдем отношение двух следующих друг за другом амплитуд колебаний. Натуральный логарифм такого отношения называется *логарифмическим декрементом затухания* Θ:

$$\Theta = \ln \frac{A_N}{A_{N+1}}. \qquad (46.13)$$

Возьмем две амплитуды в моменты времени t и $t+T$ и вычислим логарифмический декремент:

$$\Theta = \ln \frac{A_o \cdot e^{-\beta t}}{A_o \cdot e^{-\beta(t+T)}} = \ln \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = \ln \frac{1}{e^{-\beta T}} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

$$\Theta = \beta T. \qquad (46.14)$$

Снова обратимся к формуле (46.12) и будем в ней время отсчитывать не в секундах, а в периодах – $t = NT$:

$$A_N = A_o e^{-\beta N T}. \qquad (46.15)$$

Выберем номер N периода, при котором амплитуда колебаний уменьшится в e раз, то есть:

$$A_N = A_o / e.$$

$$A_N = A_o e^{-1} = A_o e^{-\beta T N} = A_o e^{-\Theta N}; \qquad e = e^{\Theta N}; \qquad \Theta N = 1.$$

Величина, обратная логарифмическому декременту, равна числу N колебаний, за время которых амплитуда уменьшится в e раз:

$$N = 1/\Theta.$$

Добротностью Q колебательной системы называется величина:

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \pi N. \qquad (46.16)$$

> Можно сказать, что добротность – это количество колебаний, которое совершит маятник до остановки.

47. Вынужденные колебания. Резонанс

Рассмотрим *пружинный маятник*, погруженный в вязкую среду. Считаем, что силы тяжести, Архимеда и реакции опоры компен-

сируют друг друга. Поэтому мы их не будем изображать на рис. 47.1. Трение скольжения о горизонтальную поверхность отсутствует.

На груз действует сила упругости пружины, возвращающая тело к положению равновесия. Проекция этой силы на ось x равна:

$$F_x = -kx. \tag{47.1}$$

Кроме силы упругости пружины на тело действует сила сопротивления среды, или сила вязкого трения, которая направлена в сторону, противоположную направлению скорости:

$$F_c = c\upsilon. \tag{47.2}$$

Кроме этих двух сил на тело действует еще внешняя *периодическая* (в рассматриваемом случае *гармоническая*) сила:

$$f = f_0 \cos\omega t. \tag{47.3}$$

Применим *второй закон Ньютона* ко всем силам, приложенным к маятнику. Полученное выражение спроектируем на ось *ox:*

$$ma = -kx - c\upsilon + f_0 \cos\omega t. \tag{47.4}$$

Учтем, что $a(t) = x''(t)$, а $\upsilon(t) = x'(t)$, и перепишем получившееся уравнение:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f_0 \cos\omega t. \tag{47.5}$$

Вводим уже знакомые обозначения $\beta = c/2m$; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ и получаем *дифференциальное уравнение вынужденных колебаний* в каноническом виде:

$$x''(t) + 2\beta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = \left(f_0/m\right)\cos\omega t. \tag{47.6}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде гармонической функции на частоте вынуждающей силы ω:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0). \tag{47.7}$$

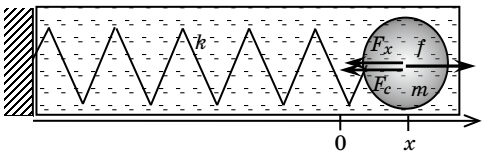


Рис. 47.1. Пружинный маятник в вязкой среде

Очевидно, что вынужденные колебания могут отставать, но не могут опережать колебания вынуждающей силы, поэтому φ_o отрицательно.

Воспользуемся методом векторных диаграмм, для чего перепишем дифференциальное уравнение и ожидаемое решение в комплексном виде:

$$z''(t) + 2\beta z'(t) + \omega_o^2 z(t) = \left(f_o/m\right)\cos\omega t; \qquad (47.6a)$$

$$z(t) = A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_o)}. \qquad (47.7a)$$

Найдем первую и вторую производные по времени функции (47.7а):

$$z'(t) = i\omega A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_o)}; \qquad (47.8)$$

$$z''(t) = \left(i\omega\right)^2 A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_o)};$$

$$z''(t) = -\omega^2 A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_o)}. \qquad (47.9)$$

Подставим $z(t)$, $z'(t)$ и $z''(t)$ в формулу (47.6а):

$$-\omega^2 A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_o)} + 2i\beta\omega A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_o)} + \omega_o^2 A \cdot e^{i(\omega t + \varphi_o)} = \left(f_o/m\right)\cos\omega t.$$

Написанное уравнение рассмотрим в момент времени $t = 0$:

$$-\omega^2 A \cdot e^{i\varphi_o} + 2i\beta\omega A \cdot e^{i\varphi_o} + \omega_o^2 A \cdot e^{i\varphi_o} = f_o/m.$$

Учтем при этом, что умножение комплексного числа на i сводится к повороту в комплексной плоскости на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

Сведения из математики

Возьмем, например, $z_1 = 2 + 3i$, умножим его на i, получим $z_2 = 2i - 3$. На рис. 47.2 мы видим, что в комплексной плоскости число z_2 повернуто на угол $\pi/2$ относительно z_1.

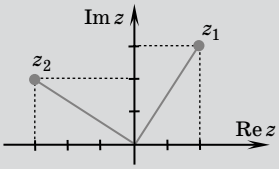


Рис. 47.2. Числа z_1 и z_2 на комплексной плоскости

Умножение комплексного числа на –1 сводится к повороту в комплексной плоскости на угол π.

$$\omega_o^2 A \cdot e^{i\varphi_o} + 2\beta\omega A \cdot e^{i(\pi/2+\varphi_o)} + \omega^2 A \cdot e^{i(\pi+\varphi_o)} = f_o/m. \qquad (47.10)$$

Отложим на диаграмме, показанной на рис. 46.3, вектор длиной $\omega_o^2 A$ под углом φ_o к оси x. Не забудем, что $\varphi_o < 0$. Вектор длиной $\omega^2 A$ отложим в противоположном направлении. Вектор длиной $2\beta\omega A$ отложим под углом 90°. Сумма трех этих векторов должна иметь длину f_o/m и в начальный момент времени быть направлена вдоль оси x.

Пользуясь рисунком, свяжем длины векторов и выразим амплитуду:

$$\left(f_o/m\right)^2 = \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 A^2 + \left(2\beta\omega\right)^2 A^2, \Rightarrow$$

$$A = \frac{f_o/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \qquad (47.11)$$

Пользуясь тем же рисунком, найдем сдвиг по фазе между колебаниями вынуждающей силы и вынужденными колебаниями маятника:

$$\mathrm{tg}\varphi_o = \frac{-2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}. \qquad (47.12)$$

Получены значения амплитуды и начальной фазы вынужденных колебаний как функции частоты вынуждающей силы.

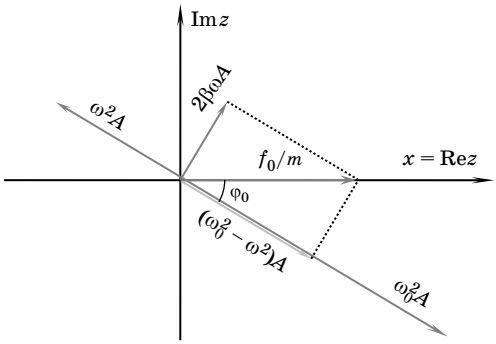


Рис. 47.3. Векторная диаграмма для вынужденных колебаний

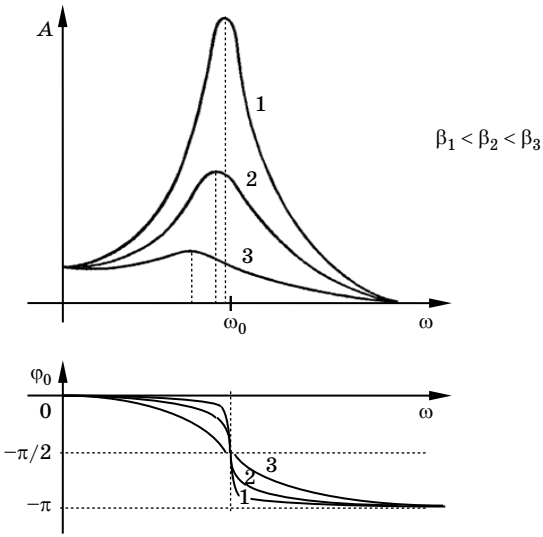


Рис. 47.4. Резонансные кривые

На рис. 47.4 приведены графики этих функций при разных значениях параметра затухания β. Соответствующие кривые называются резонансными.

Функция A (ω) имеет максимум при частотах, близких к ω_o, немного меньших ω_o. Чем меньше коэффициент затухания β, тем острее выражен пик на зависимости.

> Явление резкого возрастания амплитуды колебаний при частотах, близких к частоте собственных колебаний ω_o называется резонансом.

Формула (47.11) имеет максимум при минимуме знаменателя, а знаменатель в свою очередь имеет минимум при минимуме подкоренного выражения. Берем производную этого выражения по ω и приравниваем ее нулю:

$$\left(\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2\right)'=\left(\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2\right)'+\left(4\beta^2\omega^2\right)'=$$

$$=2\left(\omega_o^2-\omega^2\right)\left(\omega_o^2-\omega^2\right)'+4\beta^2\left(\omega^2\right)'=$$

$$= 2\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)\left(-2\omega\right) + 4\beta^2 2\omega = 4\omega\left(\omega_o^2 - \omega^2 + 2\beta^2\right) = 0\,.$$

Поскольку $\omega \neq 0$, значит $\left(\omega_o^2 + 2\beta^2 - \omega^2\right) = 0$. Получаем частоту, на которой вынужденные колебания имеют максимальную амплитуду:

$$\omega_P = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}\,. \qquad (47.13)$$

Резонансная частота меньше и частоты собственных колебаний ω_o, и частоты затухающих колебаний, вычисляемой по формуле (46.10).

Найдем амплитуду колебаний на резонансной частоте:

$$A_{max} = \frac{f_o/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_P^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_P^2}} = \frac{f_o/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_o^2 + 2\beta^2\right)^2 + 4\beta^2\left(\omega_o^2 - 2\beta^2\right)}} =$$

$$= \frac{f_0/m}{\sqrt{\left(2\beta^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_o^2 - 4\beta^2 2\beta^2}} = \frac{f_0/m}{\sqrt{4\beta^4 + 4\beta^2\omega_o^2 - 8\beta^4}} = \frac{f_0/m}{\sqrt{4\beta^2\omega_o^2 - 4\beta^4}}.$$

$$A_{max} = \frac{f_o/m}{2\beta\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}}. \qquad (47.14)$$

В отсутствие трения амплитуда колебаний при резонансе стремилась бы к бесконечности, а резонансная частота равнялась бы ω_o.

Из формулы (47.12) и графика соответствующей функции (рис. 47.4 нижний) видно, что колебания маятника отстают по фазе от вынуждающей силы. На малых частотах колебания происходят практически в одинаковой фазе, а на больших частотах – в противофазе. При $\omega = \omega_o$ сдвиг по фазе составляет $-\pi/2$.

48. Сложение колебаний одного направления с одинаковыми частотами

Пусть материальная точка одновременно совершает два гармонических колебания:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1\cos\left(\omega t + \varphi_1\right); \\ x_2(t) &= A_2\cos\left(\omega t + \varphi_2\right). \end{aligned} \qquad (48.1)$$

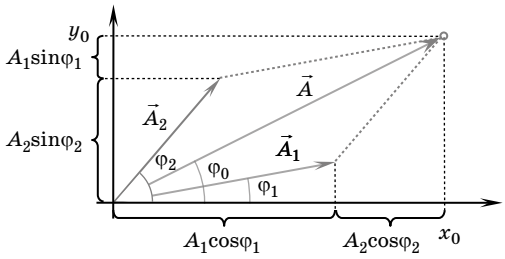


Рис. 48.1. Векторная диаграмма

Построим векторную диаграмму в начальный момент времени. Для этого на рис. 48.1 отложим вектор $\vec{A}_1$ под углом φ_1, а вектор $\vec{A}_2$ под углом φ_2.

Сумма этих векторов – вектор $\vec{A}$ задает положение точки на векторной диаграмме в начальный момент времени:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2. \tag{48.2}$$

Что будет происходить с этим вектором с течением времени? Поскольку частоты первого и второго колебаний одинаковы, векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ будут вращаться на диаграмме с одинаковыми угловыми скоростями, вся нарисованная картинка будет вращаться как целое; длина вектора $\vec{A}$ при этом будет оставаться постоянной. В проекции на ось x будут происходить гармонические колебания на той же частоте ω:

$$x(t) = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right). \tag{48.3}$$

> При сложении двух гармонических колебаний одного направления с одинаковыми частотами получается гармоническое колебание на той же частоте.

Найдем амплитуду и начальную фазу этого результирующего колебания. Для этого сначала умножим выражение (48.2) скалярно само на себя – левую часть на левую, а правую часть на правую[1].

$$A^2 = \left(\vec{A}\vec{A}\right) = \left(\left(\vec{A}_1 + \vec{A}_2\right)\left(\vec{A}_1 + \vec{A}_2\right)\right) = \left(\vec{A}_1\vec{A}_1\right) + 2\left(\vec{A}_1\vec{A}_2\right) + \left(\vec{A}_2\vec{A}_2\right);$$

[1] Учитываем, что скалярное произведение вектора самого на себя есть квадрат длины вектора.

$$A^2 = A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + A_2^2. \qquad (48.4)$$

Амплитуда результирующего колебания найдена. Теперь найдем начальную фазу φ_o:

$$\mathrm{tg}\varphi_o = y_o / x_o;$$

$$y_o = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2;$$
$$x_o = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2.$$

$$\mathrm{tg}\varphi_o = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}. \qquad (48.5)$$

Подставляя амплитуду A и начальную фазу φ_o, найденные из (48.4), (48.5) в выражение (48.3), получим результат сложения двух гармонических колебаний на одинаковых частотах.

49. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами

Пусть материальная точка совершает одновременно два гармонических колебания: одно – вдоль оси x, другое – вдоль оси y:

$$x(t) = A_1\cos(\omega t); \qquad (49.1)$$

$$y(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_o). \qquad (49.2)$$

Преобразуем написанные выражения:

$$\frac{x}{A_1} = \cos(\omega t); \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega t) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\omega t)} = \pm\sqrt{1-(x/A_1)^2};$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \varphi_o) = \cos(\omega t)\cos\varphi_o - \sin(\omega t)\sin\varphi_o.$$

Учтем, чему равен $\cos(\omega t)$, чему равен $\sin(\omega t)$, и продолжим:

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1}\cos\varphi_o \mp \sqrt{1-(x/A_1)^2}\,\sin\varphi_o;$$

$$\left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\cos\varphi_o\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2\right)\sin^2\varphi_o;$$

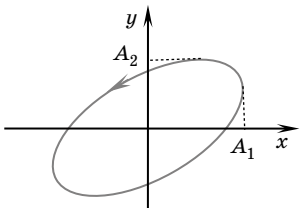


Рис. 49.1. Наклонный эллипс

$$\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi_0+\frac{x^2}{A_1^2}\cos^2\varphi_0=\sin^2\varphi_0-\frac{x^2}{A_1^2}\sin^2\varphi_0;$$

$$\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi_0+\frac{x^2}{A_1^2}\left(\cos^2\varphi_0+\sin^2\varphi_0\right)=\sin^2\varphi_0;$$

$$\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi_0+\frac{x^2}{A_1^2}=\sin^2\varphi_0. \qquad (49.3)$$

Мы получили уравнение наклонного эллипса в декартовых координатах. Его график изображен на рис. 49.1.

> Траекторией движения точки, совершающей два взаимно перпендикулярных колебания на одинаковых частотах, в общем случае является эллипс.

Рассмотрим частный случай, когда колебания по оси x и по оси y происходят синфазно:

$$\varphi_0=0 \quad\Rightarrow\quad \cos\varphi_0=1; \quad \sin\varphi_0=0.$$

Уравнение (49.3) преобразуется к виду:

$$\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}+\frac{x^2}{A_1^2}=0; \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0; \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}=0;$$

$$y=\frac{A_2}{A_1}\cdot x. \qquad (49.4)$$

Мы получили уравнение прямой, проходящей через начало координат в первой и третьей четвертях.

> Траекторией движения точки, совершающей два взаимно перпендикулярных колебания на одинаковых частотах с оди-

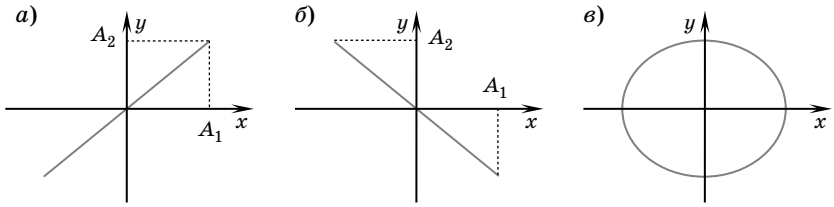


Рис. 49.2. Траектории движения материальной точки в частных случаях: а – $\varphi_0 = 0$; *б* – $\varphi_0 = \pm\pi$; *в* – $\varphi_0 = \pm\pi/2$

наковыми начальными фазами, является отрезок прямой, проходящей через начало координат в первой и третьей четвертях.

Траектория материальной точки в этом случае показана на рис. 49.2, *а*.

Рассмотрим частный случай, когда колебания по оси x и по оси y происходят в противофазе:

$$\varphi_0 = \pm\pi \;\Rightarrow\; \cos\varphi_0 = -1; \;\; \sin\varphi_0 = 0.$$

Уравнение (49.3) преобразуется к виду:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{2xy}{A_1 A_2} + \frac{x^2}{A_1^2} = 0; \;\Rightarrow\; \left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0; \;\Rightarrow\; \frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 0;$$

$$y = -\frac{A_2}{A_1} \cdot x. \qquad (49.5)$$

Мы получили уравнение прямой, проходящей через начало координат во второй и четвертой четвертях.

Траекторией движения точки, совершающей два взаимно перпендикулярных колебания на одинаковых частотах с начальными фазами, отличающимися на π, является отрезок прямой, проходящей через начало координат во второй и четвертой четвертях.

Траектория материальной точки в этом случае показана на рис. 49.2, *б*.

Рассмотрим частный случай, когда колебания по оси x и по оси y происходят со сдвигом по фазе $\pi/2$:

$$\varphi_0 = \pm\pi/2 \;\Rightarrow\; \cos\varphi_0 = 0; \;\; \sin\varphi_0 = \pm 1.$$

Уравнение (49.3) преобразуется к виду:

$$\frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cdot 0 + \frac{x^2}{A_1^2} = (\pm 1)^2;$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} = 1. \qquad (49.6)$$

Получилось уравнение эллипса, ориентированного вдоль координатных осей. Если $A_1 > A_2$, эллипс горизонтальный, если $A_1 < A_2$, эллипс вертикальный.

> Траекторией движения точки, совершающей два взаимно перпендикулярных колебания на одинаковых частотах с начальными фазами, отличающимися на $\pi/2$, является эллипс, направленный вдоль координатных осей.

Траектория материальной точки в этом случае показана на рис. 49.2, *в*. При $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ движение происходит по часовой стрелке; при $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ – против.

ВОЛНЫ

50. Основные определения

Волна – это процесс распространения колебаний в пространстве. Источник, колеблющийся на частоте ω, заставляет точки окружающей среды колебаться на той же частоте, но с некоторой задержкой по фазе. Чем больше расстояние от источника до точки среды, тем больше разность фаз. Отметим, что в волновом процессе частицы среды не перемещаются, а колеблются около своих положений равновесия.

В случае когда колебание точек происходит в направлении вектора скорости волны, волна называется *продольной*. Если же колебания происходят в направлении, перпендикулярном направлению вектора скорости, то волна называется *поперечной*.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к данному моменту времени, называется *волновым фронтом*.

> Волновой фронт делит пространство на две области: внутреннюю – вовлеченную в волновой процесс и внешнюю – не вовлеченную.

Геометрическое место точек среды, колеблющихся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*. Волновые поверхности неподвижны, а волновой фронт бежит со скоростью волны. В каждый момент времени волновой фронт совпадает с одной из волновых поверхностей.

Волновые поверхности могут быть разной формы. В простейших случаях это сфера, плоскость, цилиндр. Соответствующие волны называются *сферическими*, *плоскими* и *цилиндрическими*[1]. Форма волновой поверхности определяется формой источника и свойствами среды.

Расстояние между соседними волновыми поверхностями с разностью фаз $\Delta\varphi = 2\pi$ называется *длиной волны*. Между двумя такими волновыми поверхностями есть точки, колеблющиеся во всех фазах.

Длина волны – это расстояние, которое волна пробегает за один период колебаний T:

$$\lambda = \upsilon T. \qquad (50.1)$$

Здесь λ – длина волны; υ – скорость волны. Если в этом соотношении выразить период через частоту $T = 1/\nu$, то формулу можно переписать в виде:

$$\lambda\nu = \upsilon. \qquad (50.2)$$

51. Дифракция волн

Дифракция – это отклонение волны от направления своего распространения и проникновение волны в область геометрической тени.

Для решения различных задач нужен метод построения фронта волны в любой момент времени по известному фронту в предыдущий момент. Такой метод сформулирован Х. Гюйгенсом и называется *принципом Гюйгенса*.

---

[1] В двумерном пространстве простейшие виды волновых поверхностей – это прямая линия и окружность. Соответствующие волны называются линейными и круговыми.

Каждая точка волнового фронта является источником вторичных сферических волн. Новый волновой фронт находится как огибающая волновых фронтов этих вторичных волн.

Автор использовал его без доказательства. Ему было достаточно того, что все построения по этому принципу оказывались верными. В настоящее время принцип Гюйгенса обоснован в рамках общей теории упругости.

На рис. 51.1–51.3 показаны примеры использования принципа Гюйгенса.

В однородной изотропной среде волновой фронт всегда, перемещаясь, остается подобным самому себе.

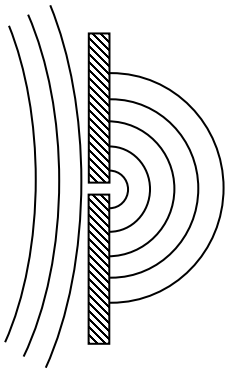


Рис. 51.1. Малое отверстие в преграде – источник сферических волн

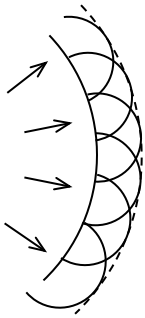


Рис. 51.2. Построение нового фронта волны по принципу Гюйгенса

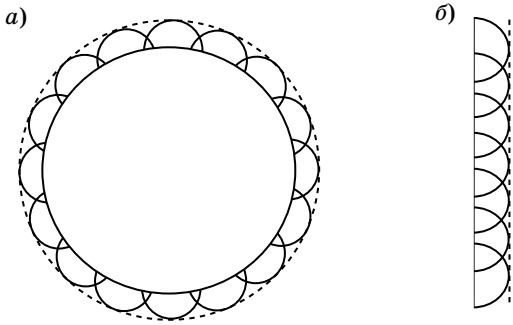


Рис. 51.3. Построения Гюйгенса для сферической (а) и плоской (б) волн

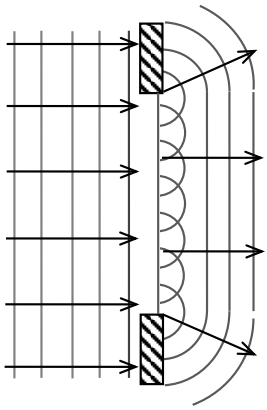


Рис. 51.4. Дифракция волн на отверстии

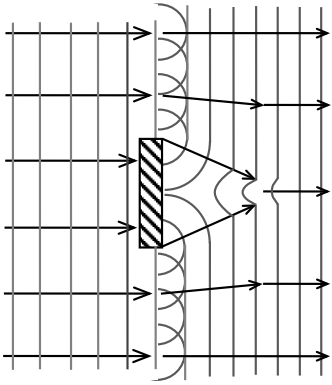


Рис. 51.5. Огибание волнами препятствия

Теперь рассмотрим прохождение волны сквозь отверстие, размеры которого существенно больше длины волны. Пусть на такое отверстие слева падает плоская волна, как это показано на рис. 51.4. Справа напротив отверстия фронт волны тоже плоский. С краев волновой фронт искривляется, волна загибается и отклоняется от первоначального направления.

На рис. 51.5 показано огибание плоской волной встреченного препятствия. На небольшом расстоянии за этим препятствием поле волны искажается, но на большом расстоянии все выглядит так, как будто никакого препятствия не было.

52. Уравнение бегущей волны

Пусть в точке 0 на оси x находится источник, который колеблется по закону:

$$\xi(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (52.1)$$

В этой формуле ξ – смещение источника относительно положения равновесия. Если вдоль оси бежит волна, то любая точка x тоже совершает колебания, но они происходят с задержкой по времени τ. Эта задержка равна времени, пока волна добегает от источника до точки x:

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos\left(\omega(t-\tau) + \varphi_0\right) = A \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right) = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{\upsilon} + \varphi_0\right).$$

Учтем, что $\omega = 2\pi/T, \lambda = \upsilon T,$ и продолжим выкладки:

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{T\upsilon} + \varphi_0\right) = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \varphi_0\right).$$

Введем *волновое число*:

$$\kappa = 2\pi/\lambda \qquad (52.2)$$

и запишем в окончательном виде:

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos\left(\omega t - \kappa x + \varphi_0\right). \qquad (52.3)$$

Мы получили уравнение волны, бегущей вдоль оси x. Оно задает закон колебания сразу всех точек на оси x. Если волна бежит в обратную сторону против направления оси, то перед x надо поменять знак.

В трехмерном случае уравнение волны, бегущей в произвольном направлении, запишется в следующем виде:

$$\xi(\vec{r},t) = A \cdot \cos\left(\omega t - \vec{\kappa} \cdot \vec{r} + \varphi_0\right). \qquad (52.4)$$

В этой формуле $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из источника в интересующую нас точку; $\vec{\kappa}$ – *волновой вектор*. Его длина – волновое число, а направление совпадает с направлением скорости волны. Точкой обозначено скалярное произведение этих векторов.

Для плоской волны амплитуда постоянна, A – const.

Для сферической волны $A(r) \sim \frac{1}{r}$.

Для цилиндрической волны $A(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$.

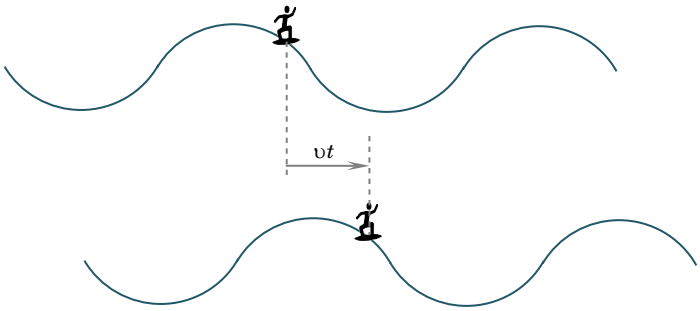


Рис. 52.1. Перемещение серфингиста с постоянной фазой волны

Вернемся к уравнению (52.2). Запишем фазу волны, продифференцируем ее, а потом зафиксируем (φ – const; $d\varphi = 0$). На рис. 52.1 показано, что значит зафиксировать фазу волны на примере серфингиста.

Скорость серфингиста – это скорость, с которой бежит постоянная фаза волны.

$$\varphi = \omega t - \kappa x + \varphi_0; \quad d\varphi = \omega dt - \kappa dx; \quad d\varphi = 0; \quad \omega dt = \kappa dx; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\kappa}.$$

Получилось выражение для *фазовой скорости* волны, то есть для скорости, с которой перемещается зафиксированная фаза волны:

$$\upsilon = \frac{\omega}{\kappa}. \tag{52.5}$$

Здесь ω – циклическая частота колебаний; κ – волновое число.

53. Интерференция волн

Пусть имеются два *когерентных* точечных источника на расстоянии b друг от друга, как это показано на рис. 53.1. Когерентность обозначает, что их колебания происходят синхронно, то есть всегда в одинаковых фазах[1]. Следовательно:

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \omega_2 = \omega; \quad \varphi_{o1} = \varphi_{o2} = \varphi_o; \\ &\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda; \quad \Rightarrow \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa. \end{aligned} \tag{53.1}$$

Амплитуды колебаний источников могут отличаться.

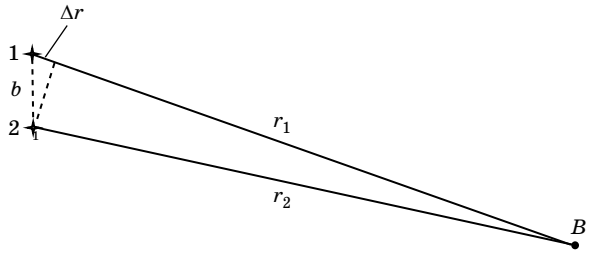


Рис. 53.1. Интерференция от двух источников

[1] В общем случае начальные фазы колебаний источников могут различаться, но их разность должна всегда оставаться постоянной. Мы будем считать, что начальные фазы колебаний источников равны.

Волны от этих источников доходят до точки B и создают там колебания:

$$\xi(\vec{r}_1, t) = A_1 \cos\left(\omega t - \vec{\kappa}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_o\right);$$
$$\xi(\vec{r}_2, t) = A_2 \cos\left(\omega t - \vec{\kappa}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_o\right). \qquad (53.2)$$

Считаем, что расстояние от источников до точки наблюдения много больше расстояния между ними – b:

$$r_1 \gg b; \quad r_2 \gg b.$$

В этом случае можно считать, что радиус-векторы параллельны друг другу:

$$\vec{r}_1 \uparrow\uparrow \vec{r}_2,$$

колебания, приносимые в точку B первой и второй волной, происходят в одном направлении. Волновые векторы при этом параллельны и с учетом условия (53.1) равны друг другу:

$$\vec{\kappa}_1 = \vec{\kappa}_2 = \vec{\kappa}.$$

Скалярное произведение в уравнениях (53.2) можно заменить произведением длин соответствующих векторов:

$$\xi_1(t) = A_1 \cos\left(\omega t - \kappa r_1 + \varphi_o\right);$$
$$\xi_2(t) = A_2 \cos\left(\omega t - \kappa r_2 + \varphi_o\right). \qquad (53.3)$$

Обратим внимание на то, что пути, пройденные первой и второй волнами – r_1 и r_2, разные. Сказанное обозначает, что волны приходят в точку наблюдения в разных фазах. Для начальных фаз колебаний, созданных в точке B первой и второй волной φ_1 и φ_2, справедливы выражения:

$$\varphi_1 = \varphi_o - \kappa r_1,$$
$$\varphi_2 = \varphi_o - \kappa r_2, \qquad (53.4)$$

где φ_o – начальная фаза колебаний источника.

В точке B происходят колебания одного направления с одинаковыми частотами и разными начальными фазами:

$$\xi_1(t) = A_1 \cos\left(\omega t + \varphi_1\right);$$
$$\xi_2(t) = A_2 \cos\left(\omega t + \varphi_2\right). \qquad (53.5)$$

В результате сложения этих колебаний (48.4) получается колебание на той же частоте с амплитудой:

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) + A_2^2}. \qquad (53.6)$$

Исследуем это выражение на максимумы и минимумы.

Амплитуда будет максимальной при $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$, то есть:

$$A_{\max} = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cdot 1 + A_2^2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2};$$

$$A_{\max} = A_1 + A_2. \qquad (53.7)$$

Выясним, когда выполняется это условие. Косинус равен единице при $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi m$, где m – целое число.

Учитывая (53.4), запишем:

$$2\pi m = \varphi_2 - \varphi_1 = (\varphi_o - \kappa r_2) - (\varphi_o - \kappa r_1) = \kappa(r_1 - r_2) = \kappa\Delta r.$$

В этой формуле Δr – разность хода волн (53.1):

$$\Delta r = r_1 - r_2 \qquad (53.8)$$

Вспоминаем определение волнового числа (52.2) и продолжаем:

$$2\pi m = \frac{2\pi\Delta r}{\lambda}; \quad \Rightarrow \quad \Delta r = m\lambda.$$

Мы получили условие максимума амплитуды колебаний при наложении когерентных волн, то есть *максимума интерференции*:

$$\Delta r = m\lambda, \qquad (53.9)$$

где m – целое число.

> Максимум интерференции наблюдается, если разность хода составляет целое число длин волн. При этом амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд.

Амплитуда будет минимальной при $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$, то есть:

$$A_{\max} = \sqrt{A_1^2 - 2A_1A_2 \cdot 1 + A_2^2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2};$$

$$A_{\max} = |A_1 - A_2|. \qquad (53.10)$$

Выясним, когда выполняется это условие. Косинус равен минус единице при $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi + 2\pi m$, то есть $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\,(m + {}^1/_2)$, где m – целое число.

Учитывая (53.4), перепишем:

$$2\pi(m + ½) = \varphi_2 - \varphi_1 = (\varphi_0 - \kappa r_2) - (\varphi_0 - \kappa r_1) = \kappa(r_1 - r_2) = \kappa\Delta r.$$

Вспоминаем определение волнового числа (52.2) и продолжаем:

$$2\pi(m+½)=\frac{2\pi\Delta r}{\lambda};\quad\Rightarrow\quad\Delta r=(m+½)\lambda.$$

Мы получили условие минимума амплитуды колебаний при наложении когерентных волн, то есть *минимума интерференции*:

$$\Delta r=(m+½)\lambda, \tag{53.11}$$

где m – целое число; $m+{}^1/_2$ – полуцелое.

> Минимум интерференции наблюдается, если разность хода составляет полуцелое число длин волн. При этом амплитуда результирующего колебания равна модулю разности амплитуд.

На практике амплитуда в этом случае часто оказывается близкой к нулю.

Разумеется, возможны случаи, когда не выполняется условие ни для максимума, ни для минимума. В таком случае амплитуда колебаний принимает промежуточное значение между (53.7) и (53.10).

Явление наложения колебаний от когерентных источников, при котором в пространстве образуются стационарные области, где эти колебания усиливаютили ослабляют друг друга, называется *интерференцией*.

54. Стоячие волны

Рассмотрим волну, бегущую вдоль шнура слева направо. Шнур закреплен на стене, как это показано на рис. 54.1.

$$\xi_{\text{пад}}(x,t)=A\cdot\cos(\omega t-\kappa x). \tag{54.1}$$

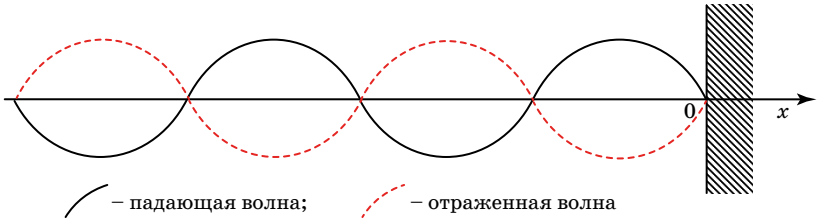


Рис. 54.1. Образование стоячей волны

Волны не могут бежать дальше, они отражаются в обратном направлении. В шнуре возникает наложение бегущей и отраженной волны. Считаем, что волна отражается от стены полностью, без потерь. При этом амплитуды падающей и отраженной волн одинаковы. Фаза отраженной волны может отличаться от фазы падающей волны на угол α:

$$\xi_{\text{отр}}(x,t) = A \cdot \cos(\omega t + \kappa x + \alpha). \qquad (54.2)$$

Найдем сумму падающей и отраженной волн как сумму косинусов:

$$\xi(x,t) = \xi_{\text{пад}}(x,t) + \xi_{\text{отр}}(x,t) = A\cos(\omega t - \kappa x) + A\cos(\omega t + \kappa x + \alpha) =$$

$$= 2A\cos\left(\frac{(\omega t - \kappa x) - (\omega t + \kappa x + \alpha)}{2}\right)\cos\left(\frac{(\omega t - \kappa x) + (\omega t + \kappa x + \alpha)}{2}\right) =$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\omega t - \kappa x - \omega t - \kappa x - \alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t - \kappa x + \omega t + \kappa x + \alpha}{2}\right) =$$

$$= 2A\cos\left(-\kappa x - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right) = 2A\cos\left(\kappa x + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Поскольку шнур закреплен на стене в точке $x = 0$, эта точка должна всегда оставаться неподвижной:

$$\xi(0,t) = 0; \;\Rightarrow\; \cos\left(\kappa x + \alpha/2\right)\Big|_{x=0} = 0; \;\Rightarrow\; \cos\left(\alpha/2\right) = 0; \;\Rightarrow\; \alpha = \pm\pi.$$

Физически $-\pi$ и $+\pi$ – это одно и то же: волна отражается в противофазе.

Поэтому выберем то, что удобнее, а именно: $\alpha = -\pi$, и воспользуемся тем, что косинус – четная функция:

$$\xi(x,t) = 2A\cos\left(\kappa x - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 2A\sin(\kappa x)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (54.3)$$

Получилось выражение, которое не является бегущей волной (сравни с формулой (52.3)). В нем множительcos ($\omega t - \pi/2$) задает закон гармонических колебаний, а множитель $(2A) \cdot \sin(\kappa x)$ – амплитуду, зависящую от координаты. Амплитуда должна быть всегда положительной, значит, $\sin(\kappa x)$ нужно взять по модулю. Но в таком случае получится выражение, отличающееся от (54.3). Оно будет неверным в каждом втором полупериоде. Чтобы исправить ошибку, одновременно с модулем поставим перед $\pi/2$ двойной знак $\mp$.

Если $\sin(\kappa x) > 0$, во втором сомножителе работает знак «минус», а еслиsin $(\kappa x) < 0$, – то знак «плюс». Кроме того, введем обозначение $2A \equiv A_0$ и запишем в окончательном виде:

$$\xi(x,t) = A_0 \left|\sin(kx)\right| \cos(\omega t \mp \pi/2). \qquad (54.4)$$

Сравним получившееся выражение с уравнением бегущей волны (52.3). На рис. 54.2 показаны мгновенные изображения бегущей (а) и стоячей (б) волн. Пунктиром показаны те же волны спустя малый промежуток времени.

Из рис. видно, что:

– бегущая волна за время наблюдения убежала слева направо, а стоячая – осталась на месте;

– соседние точки бегущей волны колеблются в разных фазах, а соседние точки в стоячей – в одинаковых.

Подробнее рассмотрим колебания в стоячей волне на рис. 54.3.

Пунктирной линией показана амплитуда $\pm A(x)$ как функция координаты:

$$A(x) = A_0 \left|\sin(\kappa x)\right|. \qquad (54.5)$$

Эта функция имеет узлы и пучности. Найдем координаты узлов, то есть нулей:

$$\sin(\kappa x) = 0; \quad \Rightarrow \quad \kappa x = \pi m; \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi x}{\lambda} = \pi m; \quad \Rightarrow$$

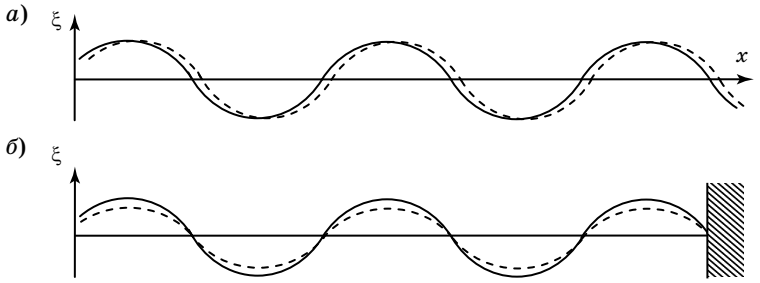


Рис. 54.2. Мгновенные изображения бегущей и стоячей волн

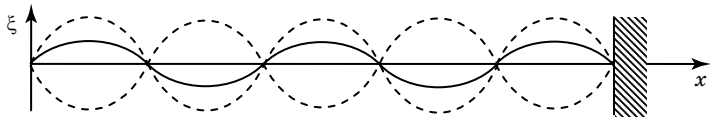


Рис. 54.3. Стоячая волна

$$x_m = \frac{\lambda}{2} \cdot m, \qquad (54.6)$$

где m – целое число.

Все точки, расположенные между соседними узлами, колеблются в одинаковых фазах.

Все точки, расположенные по разные стороны от узла, колеблются в противоположных фазах.

Измерив на опыте расстояние между соседними узлами, можно найти длину волны.

55. Волновое уравнение

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в произвольном направлении, и запишем эту же функцию в скалярном виде:

$$\xi(\vec{r},t) = A \cdot \cos\left(\omega t - \vec{\kappa} \cdot \vec{r} + \varphi_0\right) = A \cdot \cos\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_0\right). \quad (55.1)$$

Нужно понимать, что это две формы записи одной и той же функции. Мы будем пользоваться той формой записи, которая удобнее.

Найдем вторую частную производную этой функции по координате x:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \kappa_x A \cdot \sin\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_0\right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\kappa_x^2 A \cdot \cos\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_0\right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\kappa_x^2 \cdot \xi(x,y,z,t). \qquad (55.2, \text{а})$$

Аналогично получаем вторые производные по другим координатам:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -\kappa_y^2 \cdot \xi(x,y,z,t), \qquad (55.2, \text{б})$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\kappa_z^2 \cdot \xi(x,y,z,t). \qquad (55.2, \text{в})$$

Складываем выражения (55.2, а), (55.2, б), (55.2, в) и получаем:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\left(\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2\right) \cdot \xi(x,y,z,t).$$

В левой части равенства стоит оператор Лапласа, примененный к функции ξ (x, y, z). В скобках в правой части – квадрат волнового числа.

Сведения из математики

Оператором Лапласа, примененным к скалярной функции f от декартовых координат x, y, z, называется сумма вторых частных производных по этим координатам:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

$$\nabla^2 \xi(x,y,z,t) = -\kappa^2 \xi(x,y,z,t);$$

$$\frac{\nabla^2 \xi(x,y,z,t)}{\kappa^2} = -\xi(x,y,z,t). \qquad (55.3)$$

Теперь найдем вторую частную производную функции (55.1) по времени:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A \cdot \sin\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_0\right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cdot \cos\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_0\right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi\left(x,y,z,t\right);$$

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\xi\left(x,y,z,t\right). \qquad (55.4)$$

Правые части уравнений (55.3) и (55.4) равны друг другу, значит, равны и левые части:

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\nabla^2 \xi(x,y,z,t)}{\kappa^2}; \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{\kappa^2}\nabla^2 \xi(x,y,z,t);$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x,y,z,t)}{\partial t^2} = \upsilon^2 \nabla^2 \xi(x,y,z,t). \qquad (55.5, \text{а})$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных. В механике и физике оно называется *волновым уравнением*. Хотя мы вывели его для плоских волн, оно справедливо для любых волн, в том числе и для немеханических. В одномерном виде это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (55.5, \text{б})$$

Если какая-либо функция координат и времени удовлетворяет уравнению вида (55.5, а) или (55.5, б), то эта функция описывает распространение волны со скоростью υ.

56. Скорость продольной волны в упругой среде

Возьмем стержень длиной ℓ, закрепленный с одной стороны, и приложим к нему силу F. Стержень растянется на некоторую величину $\Delta\ell$, как это показано на рис. 56.1.

Приложенная сила F и вызываемая ею деформация $\Delta\ell$ связаны *законом Гука*:

$$F = k\Delta\ell.$$

Коэффициент жесткости или коэффициент упругости k зависит от длины стержня ℓ, площади его поперечного сечения S и от свойства материала, называемого модулем Юнга, – E.

$$k = \frac{SE}{\ell}.$$

$$F = SE \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell} = SE\varepsilon. \qquad (56.1)$$

В этой формуле $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$ – относительное удлинение стержня.

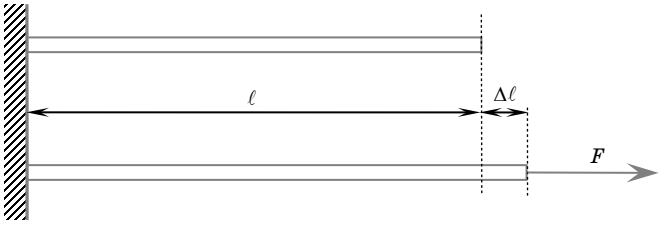


Рис. 56.1. Деформация растяжения стержня

Пусть вдоль стержня в направлении x бежит волна. При этом малый фрагмент стержня длиной Δx оказывается смещенным в сторону от положения равновесия и одновременно деформированным, как это показано на рис. 56.2. Левая и правая границы выделенного фрагмента имеют разные смещения. Относительное удлинение фрагмента равно:

$$\varepsilon = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\Delta x} = \frac{\Delta \xi}{\Delta x}.$$

В пределе при $\Delta x \to 0$

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \qquad (56.2)$$

Сила ΔF, возникающая при растяжении стержня, равна разности сил $F_{x_2} - F_{x_1}$. При малом значении Δx должно быть справедливым равенство:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Подставляем выражение (56.1) в правую часть этого равенства, получаем:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = SE\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}.$$

Принимая во внимание соотношение (56.2), переписываем это выражение:

$$\Delta F = E\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} S\Delta x.$$

Запишем окончательное выражение для силы, действующей на элемент стержня объемом $\Delta V = S\Delta x$:

$$\Delta F = E\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\Delta V. \qquad (56.3)$$

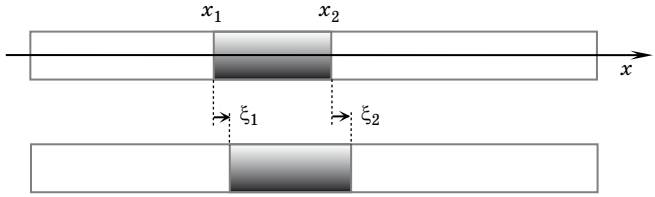


Рис. 56.2. Смещение и деформация фрагмента струны

Теперь получим эту же силу по-другому, через *второй закон Ньютона*:

$$\Delta F = \Delta m a = \rho \Delta V \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \qquad (56.4)$$

В написанной формуле ρ – плотность вещества стержня; $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ – мгновенное ускорение фрагмента стержня массой Δm; ΔV – объем этого фрагмента. Слева в формулах (56.3) и (56.4) стоит одна и та же величина, значит, правые части равны друг другу:

$$\rho \Delta V \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta V;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \qquad (56.5)$$

Получилось волновое уравнение для одномерного случая. Это обозначает, что рассматриваемый процесс – волновой. Скорость этой продольной волны найдем, сравнивая выражения (56.5) и (55.5, б):

$$\upsilon_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (56.6)$$

Для поперечной волны в твердой среде получается аналогичное выражение, в котором вместо модуля Юнга будет стоять *модуль сдвига – G*:

$$\upsilon_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \qquad (56.7)$$

57. Скорость поперечной волны в натянутой струне

Струной будем называть нить, которая не сопротивляется изгибу. Считаем, что струна натянута с силой F. Рассмотрим малый элемент струны – дугу длиной $\Delta \ell$, массой Δm, к концам которого приложены растягивающие силы F_1 и F_2, как это показано на рис. 57.1.

Поскольку силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не параллельны друг другу, их равнодействующая направлена к центру дуги и равна:

$$\Delta F = F_1 \sin\left(\Delta\varphi/2\right) + F_2 \sin\left(\Delta\varphi/2\right).$$

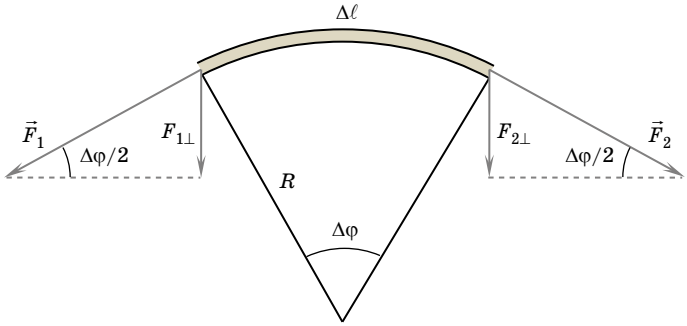


Рис. 57.1. Силы, действующие на элемент струны

Угол дуги $\Delta\varphi$ считаем малым, силы F_1, F_2 равны друг другу $F_1 = F_2 = F$:

$$\Delta F = F\Delta\varphi. \tag{57.1}$$

Перенесемся мысленно в другую систему отсчета, которая бежит со скоростью волны слева направо. В ней элемент массой Δm движется со скоростью υ по дуге радиусом R. На него действует центростремительная сила:

$$\Delta F = \frac{\Delta m\upsilon^2}{R}. \tag{57.2}$$

Приравнивая (57.1) и (57.2), получаем:

$$F\Delta\varphi = \frac{\Delta m\upsilon^2}{R}; \quad \Rightarrow \quad F\Delta\varphi R = \Delta m\upsilon^2; \quad \Rightarrow \quad F\Delta\ell = \Delta m\upsilon^2.$$

Считаем, что плотность материала струны – ρ, а площадь поперечного сечения – S. В таком случае получаем:

$$F\Delta\ell = \Delta\ell S\rho\upsilon^2; \quad F = S\rho\upsilon^2;$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{F}{S\rho}}. \tag{57.3}$$

Мы получили скорость поперечной волны в струне, не сопротивляющейся изгибу.

58. Энергия волн

Возьмем стержень длиной ℓ, закрепленный с одной стороны, и приложим к нему силу F. Стержень растянется на некоторую величину $\Delta\ell$, как это показано на рис. 58.1.

Потенциальная энергия растянутого стержня будет равна:

$$W = \frac{k\Delta\ell^2}{2}. \tag{58.1}$$

Коэффициент жесткости или коэффициент упругости k зависит от длины стержня ℓ, площади его поперечного сечения S и от свойства материала, называемого модулем Юнга, – E:

$$k = \frac{SE}{\ell}.$$

Подставляем это соотношение в формулу (58.1):

$$W = \frac{E\Delta\ell^2 S}{2\ell} = \frac{E\Delta\ell^2 S\ell}{2\ell^2}.$$

В этом выражении $S\ell = V$ – объем стержня, а $\frac{\Delta\ell}{\ell} = \varepsilon$ – его относительное удлинение. Запишем потенциальную энергию стержня в этих обозначениях:

$$W = \frac{E\varepsilon^2 V}{2}. \tag{58.2}$$

Пусть вдоль стержня в направлении x бежит волна:

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos\left(\omega t - \kappa x + \varphi_0\right). \tag{58.3}$$

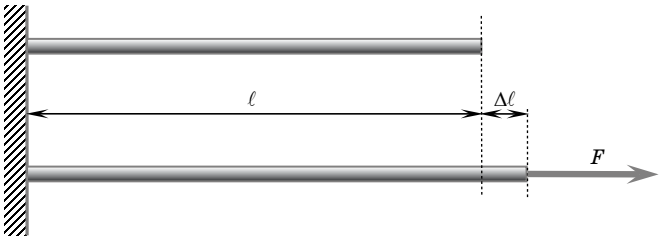


Рис. 58.1. Деформация растяжения стержня

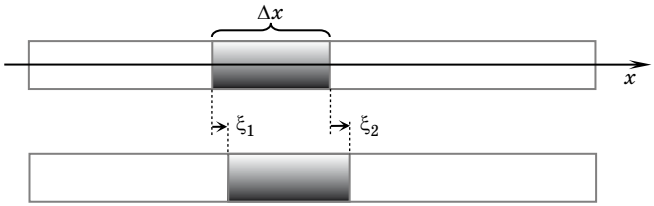


Рис. 58.2. Смещение и деформация фрагмента струны

Малый фрагмент стержня длиной Δx оказывается смещенным в сторону от положения равновесия и одновременно деформированным, как это показано на рис. 58.2.

Левая и правая граница выделенного фрагмента имеют разные смещения. Относительное удлинение фрагмента равно:

$$\varepsilon = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\Delta x} = \frac{\Delta \xi}{\Delta x}.$$

В пределе при $\Delta x \to 0$ $$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \qquad (58.4)$$

Подставляя уравнение бегущей вдоль стержня в направлении x волны (58.3) в (58.4), получаем:

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = A\kappa \cdot \sin\left(\omega t - \kappa x + \varphi_0\right).$$

Потенциальная энергия выделенного фрагмента стержня равна:

$$\Delta W_{\text{П}} = \frac{E\Delta V}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \frac{E\kappa^2 \Delta V A^2}{2} \cdot \sin^2\left(\omega t - \kappa x + \varphi_0\right). \qquad (58.5)$$

Скорость фрагмента стержня равна производной от смещения по времени:

$$\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} = -A\omega \cdot \sin\left(\omega t - \kappa x + \varphi_0\right).$$

Кинетическая энергия выделенного фрагмента стержня массой Δm равна:

$$\Delta W_{\text{К}} = \frac{\Delta m}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{\rho \omega^2 A^2 \Delta V}{2} \cdot \sin^2\left(\omega t - \kappa x + \varphi_0\right). \qquad (58.6)$$

В этом выражении ρ – плотность среды; ΔV – объем выделенного фрагмента.

Полная энергия фрагмента стержня равна сумме его кинетической и потенциальной энергий:

$$\Delta W = \Delta W_{\text{К}} + \Delta W_{\text{П}} = \left(\rho\omega^2 + E\kappa^2\right) A^2 \sin^2\left(\omega t - \kappa x + \varphi_{\text{о}}\right)\frac{\Delta V}{2}. \quad (58.7)$$

Вспомним формулы (52.5) и (56.6) для фазовой скорости волны, бегущей вдоль стержня:

$$\upsilon = \frac{\omega}{\kappa} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Из написанного следует, что:

$$\rho\omega^2 = E\kappa^2, \text{ или } \rho\omega^2 + E\kappa^2 = 2\rho\omega^2.$$

Полная энергия фрагмента стержня в таком случае равна:

$$\Delta W = \rho\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega t - \kappa x + \varphi_{\text{о}}\right)\Delta V. \quad (58.8)$$

Поделим энергию фрагмента среда на объем этого фрагмента и получим *объемную плотность энергии*, переносимой волнами:

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V}; \quad (58.9)$$

$$w = \rho\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega t - \kappa x + \varphi_{\text{о}}\right). \quad (58.10)$$

Очевидно, что объемная плотность энергии распределена неравномерно по длине стержня. Она образует сгущения и разрежения. На рис. 58.3 приведены в сравнении графики функций $\sin\varphi$ и $\sin^2\varphi$.

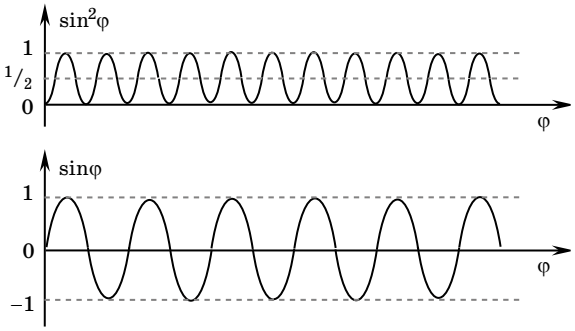


Рис. 58.3. Сравнение функций sinφ и sin² φ

Очевидно, что:
– период функции $\sin^2\varphi$ вдвое меньше периода функции $\sin\varphi$;
– среднее значение функции $\sin^2\varphi$ равно $^1/_2$.

> Колебания энергии происходят на частоте вдвое большей, чем частота колебаний точек среды.

> Если в среде бегут волны, то они всегда несут некоторую энергию.

Средняя объемная плотность этой энергии (все равно, как усреднять, по времени или по координате) равна:

$$\langle w\rangle = \frac{\rho A^2\omega^2}{2}. \qquad (58.11)$$

59. Перенос энергии волнами

Снова обратимся к формуле для объемной плотности энергии волны и преобразуем квадрат синуса через косинус двойного аргумента:

$$w = \rho\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega t - \kappa x + \varphi_o\right) = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2} - \frac{\rho\omega^2 A^2}{2}\cos 2\left(\omega t - \kappa x + \varphi_o\right);$$

$$w = \langle w\rangle - \frac{\rho\omega^2 A^2}{2}\cos 2\left(\omega t - \kappa x + \varphi_o\right). \qquad (59.1)$$

Объемная плотность энергии содержит в себе постоянную и переменную составляющие. Постоянная составляющая – это средняя объемная плотность энергии, задаваемая формулой (58.11). Переменная часть подобна бегущей волне. Только в этом случае бежит не смещение точек среды, а энергия, запасенная волной. Частота колебаний энергии – 2ω, а волновое число – 2κ. Соответственно, скорость переноса энергии:

$$\upsilon = \frac{2\omega}{2\kappa} = \frac{\omega}{\kappa} = \upsilon$$

равна фазовой скорости бегущей волны.

> Энергия переносится со скоростью, равной фазовой скорости волны.

Рассмотрим некоторое замкнутое пространство, в котором имеются механические (акустические или звуковые) волны и отверстие площадью S, через которое волны выходят наружу (например, раскрытое окно). *Потоком энергии* Φ через поверхность S называется энергия ΔW, переносимая волнами через эту поверхность за единицу времени:

$$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \tag{59.2}$$

Если поверхность S рассматривать как источник излучения волн, то поток энергии – это мощность этого источника.

Плотностью потока энергии называется поток энергии через единичную поверхность, перпендикулярную направлению скорости волны:

$$j = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_{\perp}}. \tag{59.3}$$

Рассмотрим плоскую волну, бегущую вдоль оси x. Выделим прямоугольный параллелепипед, в котором волны бегут и переносят энергию от левой грани к правой, как это показано на рис. 59.1.

Выберем промежуток времени Δt таким, чтобы за него волна добежала от левой грани до правой:

$$\Delta t = \frac{\ell}{\upsilon}. \tag{59.4}$$

За это время вся энергия внутри параллелепипеда пересечет правую отмеченную грань. Поток энергии через правую грань в таком случае равен:

$$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{w \Delta V \upsilon}{\ell} = \frac{w \ell S \upsilon}{\ell} = wS\upsilon.$$

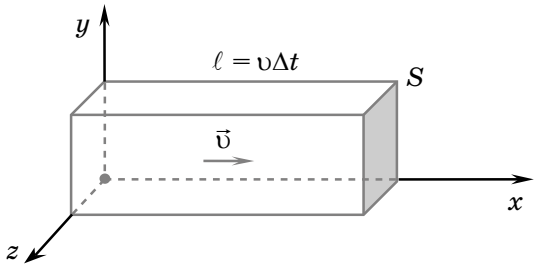


Рис. 59.1. Перенос энергии в выбранном объеме

Плотность потока энергии равна:

$$j = \frac{\Phi}{S} = \frac{wS\upsilon}{S} = w\upsilon;$$

$$\vec{j} = w\vec{\upsilon}. \qquad (59.5)$$

Вектор плотности потока энергии или вектор переноса энергии называется *вектором Умова*. Этот вектор имеет направление скорости волны и характеризует перенос энергии волной. Среднее по периоду колебаний значение модуля вектора Умова называется интенсивностью волны:

$$I = \langle w \rangle \upsilon;$$

$$I = \frac{\rho A^2 \omega^2 \upsilon}{2}. \qquad (59.6)$$

Отметим, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату частоты. Вернемся к началу и поймем смысл интенсивности волны.

> Интенсивность – это средняя по времени энергия, переносимая волной через единичную поверхность, перпендикулярную направлению этой скорости волны.

Рассмотрим точечный, или сферический изотропный, источник с мощностью N в трехмерном пространстве (см. рис. 59.2, *а*). Окружим его двумя сферическими поверхностями с радиусами r_1 и r_2. Центры сфер совпадают, в них находится источник. Источник создает сферическую волну.

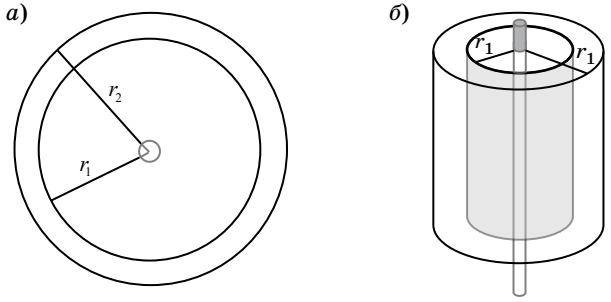


Рис. 59.2. Источник сферических (а) и цилиндрических(б) волн

Поток энергии через любую, первую или вторую, сферу равен мощности источника N. В данном случае важнее то, что потоки энергии через первую и вторую сферы равны друг другу. Поток энергии через сферу можно найти, умножив интенсивность на площадь сферы:

$$I_1 \cdot 4\pi r_1^2 = I_2 \cdot 4\pi r_2^2.$$

Свяжем интенсивность волны с ее амплитудой при помощи формулы (59.6):

$$\frac{\rho\omega^2 A_1^2 \upsilon \cdot 4\pi r_1^2}{2} = \frac{\rho\omega^2 A_2^2 \upsilon 4\pi r_2^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad A_1^2 r_1^2 = A_2^2 r_2^2, \quad \Rightarrow \quad A \cdot r = \text{const};$$

$$A = \frac{\text{const}}{r}.$$

Мы доказали, что амплитуда сферической волны обратно пропорциональна расстоянию до источника.

Рассмотрим линейный или цилиндрический источник с мощностью N в трехмерном пространстве (см. рис. 59.2, *б*). Окружим его двумя сооснными цилиндрическими поверхностями с радиусами r_1 и r_2. Источник находится на оси цилиндров и создает цилиндрическую волну.

Поток энергии через любую цилиндрическую поверхность, первую или вторую, равен мощности источника N. В данном случае важно, что потоки энергии через первую и вторую поверхности равны. Поток энергии через боковую поверхность цилиндра можно найти, умножив интенсивность на площадь этой поверхности:

$$I_1 \cdot 2\pi r_1 \ell = I_2 \cdot 2\pi r_2 \ell.$$

В этой формуле ℓ – высота цилиндра (длина источника). Свяжем интенсивность волны с ее амплитудой при помощи формулы (59.6):

$$\frac{\rho\omega^2 A_1^2 \upsilon \cdot 2\pi r_1 \ell}{2} = \frac{\rho\omega^2 A_2^2 \upsilon 2\pi r_2 \ell}{2};$$

$$A_1^2 r_1 = A_2^2 r_2, \quad \Rightarrow \quad A \cdot \sqrt{r} = \text{const};$$

$$A = \frac{\text{const}}{\sqrt{r}}.$$

Мы доказали, что амплитуда цилиндрической волны обратно пропорциональна квадратному корню из расстояния до источника.

Точно такая же зависимость амплитуды от расстояния наблюдается для круговых волн на поверхности.

60. Групповая скорость волн

Пусть вдоль оси x бегут две волны с равными амплитудами и близкими, но не равными частотами – ω_1 и ω_2. Волновые числа κ_1 и κ_2 тоже близки, но не равны друг другу:

$$\begin{aligned}\xi_1(x,t) &= A\cdot\cos(\omega_1 t-\kappa_1 x);\\ \xi_2(x,t) &= A\cdot\cos(\omega_2 t-\kappa_2 x).\end{aligned} \qquad (60.1)$$

Сведения из математики

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

$$\begin{aligned}\xi(x,t)&=\xi_1(x,t)+\xi_2(x,t)=A\cdot\cos(\omega_1 t-\kappa_1 x)+A\cdot\cos(\omega_2 t-\kappa_2 x)=\\ &=2A\cdot\cos\left(\frac{\omega_1 t-\kappa_1 x-\omega_2 t+\kappa_2 x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1 t-\kappa_1 x+\omega_2 t-\kappa_2 x}{2}\right)=\\ &=2A\cdot\cos\left(\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}-\frac{(\kappa_1-\kappa_2)x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}-\frac{(\kappa_1+\kappa_2)x}{2}\right).\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}=\omega;\qquad \frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}=\Delta\omega;\qquad \Delta\omega\ll\omega;$$
$$\frac{(\kappa_1+\kappa_2)}{2}=\kappa;\qquad \frac{(\kappa_1-\kappa_2)}{2}=\Delta\kappa;\qquad \Delta\kappa\ll\kappa.$$

и запишем окончательную формулу:

$$\xi(x,t)=2A\cdot\cos\left(\Delta\omega t-\Delta\kappa x\right)\cdot\cos\left(\omega t-\kappa x\right). \qquad (60.2)$$

На рис. 60.1 приведена функция $\xi\,(x,\,t)$ в зависимости от t.
Эта функция представляет собой произведение двух функций:

$$\xi(x,t)=A(x,t)\cdot\zeta(x,t). \qquad (60.3)$$

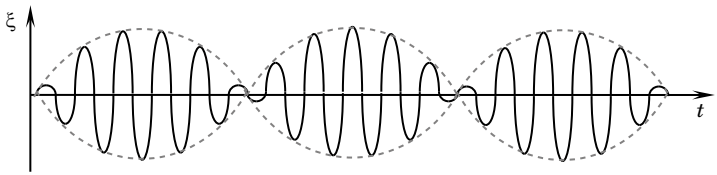


Рис. 60.1. Наложение двух волн с близкими частотами

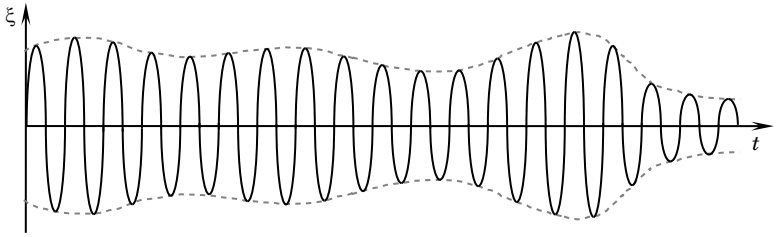


Рис. 60.2. Высокочастотная синусоида, амплитудно-модулированная голосом

Вторая функция в произведении (60.2):

$$\zeta(x,t)=\cos(\omega t-\kappa x) \tag{60.4}$$

есть волна, бегущая в направлении x со скоростью:

$$\upsilon=\frac{\omega}{\kappa}. \tag{60.5}$$

Первая функция:

$$A(x,t)=2A\cdot\cos\left(\Delta\omega t-\Delta\kappa x\right), \tag{60.6}$$

показанная на рис. 60.1 пунктиром, является огибающей для второй функции. Функция $A\,(x,\,t)$ – это распределенная в пространстве и времени амплитуда бегущей волны (60.4). В радиотехнике, где имеют дело с электромагнитными волнами, волну $\zeta\,(x,\,t)$ называют *несущей*, а функцию $A\,(t)$ – *передаваемым сигналом*. На рис. 60.2 приведен простейший пример – высокочастотная волна, модулированная голосом.

Отметим, что функция $A\,(x,\,t)$ сама по себе тоже является волной, бегущей в том же направлении x со скоростью:

$$u=\frac{\Delta\omega}{\Delta\kappa}.$$

На рис. 60.1 мы рассматривали *немонохроматическую* волну, состоящую из двух компонент. Если волна состоит из большего числа компонент, то форма огибающей будет сложнее, как, например, на рис. 60.2. Формула скорости в этом случае записывается в виде:

$$u = \frac{d\omega}{d\kappa}. \tag{60.7}$$

Скорость υ – это фазовая скорость волны, то есть скорость несущей. Скорость u – это *групповая скорость* волны, то есть скорость огибающей. Если все монохроматические компоненты волны бегут с одинаковыми скоростями, то и огибающая бежит с той же скоростью, то есть со скоростью несущей. Групповая скорость равна фазовой $\upsilon = u$.

Если же фазовая скорость волны зависит от ее длины, то есть разные компоненты одной и той же немонохроматической волны бегут с разными скоростями, то групповая скорость будет отличаться от фазовой. Возможны случаи как $\upsilon > u$, так и $\upsilon < u$.

> Запрет Эйнштейна касается только групповой скорости волн, то есть скорости передачи сигнала $u < c$.

61. Дисперсия волн

Дисперсия как волновое явление – это зависимость фазовой скорости волны от ее длины:

$$\upsilon = \upsilon(\lambda). \tag{61.1}$$

Очевидно, что это явление возможно только для немонохроматических волн, поскольку функция (61.1) должна быть определена на некотором промежутке λ, а не на единственном числе. Итак, имеем немонохроматическую волну, состоящую из нескольких монохроматических компонент. Каждая из них бежит со своей фазовой скоростью. Групповая скорость в таком случае отличается от фазовой. Свяжем их значения друг с другом:

$$\upsilon = \frac{\omega}{\kappa};\quad \Rightarrow\quad \omega = \kappa\upsilon.\quad \kappa = \frac{2\pi}{\lambda};\quad d\kappa = 2\pi d\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$u = \frac{d\omega}{d\kappa};\quad u = \frac{d(\kappa\upsilon)}{d\kappa};\quad u = \frac{d\kappa}{d\kappa}\cdot\upsilon + \kappa\frac{d\upsilon}{d\kappa} = \upsilon + \kappa\frac{d\upsilon}{d\kappa} = \upsilon - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{d\upsilon}{\left(2\pi/\lambda^2\right)d\lambda};$$

$$u = \upsilon - \frac{\lambda^2 2\pi}{\lambda 2\pi}\frac{d\upsilon}{d\lambda} = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}.$$

Мы получили связь групповой скорости с фазовой:

$$u = \upsilon - \lambda \frac{d\upsilon}{d\lambda}. \qquad (61.2)$$

Производную от скорости по длине волны называют *дисперсией*[1].

$$D_\lambda = \frac{d\upsilon}{d\lambda}. \qquad (61.3)$$

Если дисперсия положительна, $D_\lambda > 0$, то есть длинные волны бегут быстрее коротких, то такая дисперсия называется *нормальной*.

Если дисперсия отрицательна, $D_\lambda < 0$, то есть короткие волны бегут быстрее длинных, то такая дисперсия называется *аномальной*.

Если величина дисперсии $D_\lambda = 0$, то есть длинные и короткие волны бегут с одинаковой скоростью, то дисперсии как явления нет.

На рис. 61.1 показана зависимость фазовой скорости волны от ее длины. В этом случае наблюдается нормальная дисперсия.

Отметим на осях координаты выбранной точки λ и υ. Проведем через нее касательную до пересечения с вертикальной осью. Горизонтальный катет на рисунке имеет длину λ, вертикальный – $\lambda \cdot \mathrm{tg}\alpha$. Учтем, что производная функции равна тангенсу угла наклона касательной. Из формулы (61.2) следует:

$$\lambda \frac{d\upsilon}{d\lambda} = \upsilon - u.$$

> Касательная к графику функции $\upsilon(\lambda)$, проведенная до пересечения с осью υ, отсекает на этой оси значение групповой скорости u.

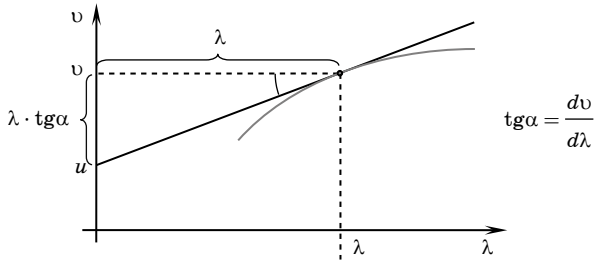


Рис. 61.1. Графическое определение групповой скорости волн

[1] Не путайте понятия дисперсии как волнового явления и дисперсии как физической величины.

62. Эффект Доплера

Все мы замечали, что гудок приближающегося и удаляющегося электровоза звучит по-разному. Скачок частоты сигнала в момент, когда электровоз проходит мимо нас, хорошо заметен. Если источник и приемник движутся, то частота испускаемого и принимаемого звука не совпадают. Качественно понять явление можно на следующем наглядном примере.

Представим себе некого корреспондента начала XX в., который по заданию своего издательства отправляется в путешествие на поезде из Петербурга во Владивосток. Такое путешествие длится около двух недель. В те времена не было Интернета и мобильной связи. Главным средством общения были обыкновенные бумажные письма. Редактор ждет от него ежедневных письменных отчетов об увиденном в пути. Каждый день корреспондент пишет письмо и вечером отправляет его в редакцию. В то время даже авиапочты еще не было. Самый быстрый способ доставки – положить письмо в почтовый вагон встречного поезда. Будем считать, что именно это и удается корреспонденту каждый вечер. Сутки проходят. Письмо отправлено. Оно едет назад на таком же поезде и оказывается в Петербурге через два дня после отъезда. Второе письмо будет отправлено через двое суток и прибудет в Петербург через четверо суток, третье – через шесть и т. д. Письма отправляются ежедневно, а приходят в редакцию через день. Корреспондент в этом не виноват, в этом «виноват» эффект Доплера. Частота сигнала, испускаемого движущимся объектом, не совпадает с частотой принимаемого сигнала.

Рассмотрим случай, показанный на рис. 62.1, когда источник звуковой волны приближается к неподвижному приемнику со скоростью $\upsilon_и$. Скорость звука в воздухе – $\upsilon_з$.

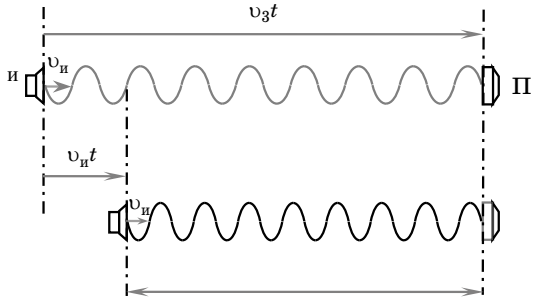


Рис. 62.1. Источник звука приближается к приемнику

В некоторый момент времени движущийся источник начинает излучать звуковую волну на частоте ν_0. Через некоторое время t, совершив N колебаний, источник заканчивает излучение. За это время волна пробежала расстояние $\upsilon_з t$, а источник переместился на расстояние $\upsilon_и t$. На длине $\upsilon_з t - \upsilon_и t$ укладывается N длин волн. Таким образом, длина волны, излучаемая движущимся источником, равна:

$$\lambda = \frac{(\upsilon_з - \upsilon_и)t}{N}.$$

Здесь N/t – частота излучаемого источником сигнала ν_0. Таким образом:

$$\lambda = \frac{\upsilon_з - \upsilon_и}{\nu_0}. \qquad (62.1)$$

В верхней части рисункапоказана волна, которую излучал бы неподвижный источник. Очевидно, что длина волны, излучаемой движущимся источником, изменилась. Причина этого в том, что звук бежит относительно неподвижной среды – воздуха.

Рассмотрим второй случай, показанный на рис. 62.2, когда источник неподвижен, а приемник приближается к нему со скоростью $\upsilon_п$.

В некоторый момент времени неподвижный источник начинает излучать звуковую волну на частоте ν_0. Совершив N колебаний, источник заканчивает излучение. Через некоторое время t после этого момента волна пробегает расстояние $\upsilon_з t$. За то же самое время приемник перемещается навстречу волне на расстояние $\upsilon_п t$ оказывается в ее конце. На длине $\upsilon_з t + \upsilon_и t$ укладывается N длин волн. Таким образом, для длины волны, принятой движущимся приемником, имеем:

$$\lambda = \frac{(\upsilon_з + \upsilon_п)t}{N}.$$

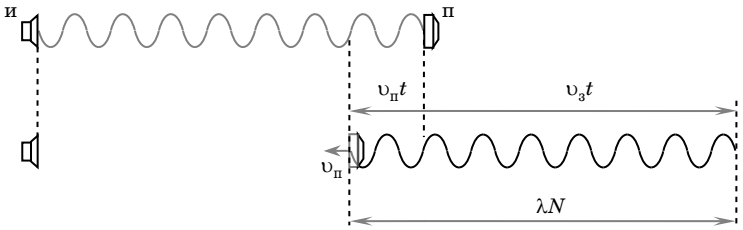


Рис. 62.2. Приемник приближается к источнику звука

В этой формуле N/t частота принимаемых колебаний ν:

$$\nu = \frac{\upsilon_з + \upsilon_п}{\lambda}. \qquad (62.2)$$

В общем случае, когда двигаются и источник, и приемник, нужно в формулу (62.2) подставить длину волны из (62.1). Получается формула изменения частоты принимаемого сигнала при одновременном движении и источника, и приемника:

$$\nu = \frac{\upsilon_з + \upsilon_п}{\upsilon_з - \upsilon_и}\nu_0. \qquad (62.3)$$

Формула (62.3) получена для скоростей источника и приемника, направленных навстречу друг другу. Если одна из этих скоростей направлена в противоположную сторону, то перед ней нужно изменить знак.

Пример 62.1. Локомотив движется со скоростью 17 м/с и издает сигнал на частоте 2 кГц. Какую частоту сигнала слышит человек при риближении и при удалении локомотива? Скорость звука принять равной 340 м/с.

Дано:

$\upsilon_и = 17$ м/с
$\upsilon_п = 0$
$\upsilon_з = 340$ м/с

Решение:

В случае когда локомотив приближается к наблюдателю:

$$\nu_1 = \frac{\upsilon_з}{\upsilon_з - \upsilon_и}\nu_0. \quad \nu_1 = \frac{340}{340 - 17}2000 = 2105 \text{ Гц}.$$

В случае когда локомотив удаляется от наблюдателя:

$$\nu_2 = \frac{\upsilon_з}{\upsilon_з + \upsilon_и}\nu_0. \quad \nu_2 = \frac{340}{340 + 17}2000 = 1905 \text{ Гц}.$$

Ответы: $\nu_1 = 2105$ Гц, $\nu_2 = 1905$ Гц.

Литература

1. Иродов И. Е. Механика: Основные законы: учеб. пособие. М., 2005.

2. Савельев И. В. Курс общей физики: учеб. пособие: в 3. т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. М., 2014.

3. Савельев И. В. Курс общей физики: учеб. пособие: в 3 т. Т. 3. Электричество и магнетизм. Колебания и волны. Оптика. М., 2014.

4. Савельев И. В. Курс физики: учеб. пособие: в 3. т. Т. 2. Механика. Молекулярная физика. М., 2008.

5. Савельев И. В. Курс физики: учеб. пособие: в 3. т. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. М., 2008.

6. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие. М., 2007.

7. Фриш С. Э., Тиморева А. В. Курс общей физики: учебник: в 3 т. Т. 1. М.; Л., 1962.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 5

Механика 7

Кинематика 7

1. Кинематика материальной точки 7
2. Кинематика абсолютно твердого тела 12
3. Связь линейных и угловых величин 16
4. Обобщенные координаты и степени свободы 22
5. Основная задача кинематики 28

Динамика 33

6. Законы Ньютона 33
7. Законы движения планет и закон Всемирного тяготения 36
8. Закон сохранения импульса 39
9. Теорема о движении центра масс 40
10. Момент импульса и момент силы 43
11. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса 47
12. Работа, мощность и кинетическая энергия 48
13. Потенциальные и непотенциальные силы 51
14. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии 55
15. Примеры вычисления потенциальной энергии 57
16. Движение тел в гравитационном поле 59
17. Первая и вторая космические скорости 61
18. Связь силы и потенциальной энергии 63
19. Связь законов сохранения с симметрией пространства и времени 65
20. Преобразования Галилея 68
21. Неинерциальные системы отсчета 69
22. Центробежная сила 71
23. Сила Кориолиса 73

Динамика вращения абсолютно твердого тела 77

24. Момент инерции 77
25. Теорема Штейнера 82
26. Моменты инерции тела относительно трех координатных осей 85
27. Момент импульса абсолютно твердого тела 91

28. Уравнения динамики и статики абсолютно твердого тела 93
29. Работа и мощность при вращении абсолютно твердого тела 95
30. Кинетическая энергия абсолютно твердого тела 96
31. Аналогия формул для поступательного и вращательного движений 98

Специальная теория относительности 99
32. Экспериментальные предпосылки теории относительности 99
33. Постулаты Эйнштейна 102
34. Преобразования Лоренца 103
35. Следствия из преобразований Лоренца 107
36. Закон сложения скоростей 112
37. Интервал 115
38. Релятивистская динамика 117
39. Инварианты теории относительности 120
40. Принцип эквивалентности в теории относительности 120

Колебания и волны 122

Механические колебания 122
41. Уравнение гармонических колебаний 122
42. Условия возникновения колебаний 124
43. Энергия гармонических колебаний 126
44. Векторная диаграмма 127
45. Физический и математический маятник 128
46. Затухающие колебания 130
47. Вынужденные колебания. Резонанс 133
48. Сложение колебаний одного направления с одинаковыми частотами 138
49. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами 140

Волны 143
50. Основные определения 143
51. Дифракция волн 144
52. Уравнение бегущей волны 146
53. Интерференция волн 148
54. Стоячие волны 151

55. Волновое уравнение 154
56. Скорость продольной волны в упругой среде 156
57. Скорость поперечной волны в натянутой струне 158
58. Энергия волн 160
59. Перенос энергии волнами 163
60. Групповая скорость волн 167
61. Дисперсия волн 169
62. Эффект Доплера 171
Литература 174

Учебное издание

Коваленко Иван Иванович

КУРС ФИЗИКИ

Часть 1

МЕХАНИКА. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Учебное пособие

ISBN: 978-5-8088-1429-5

9 785808 814295

Редактор *Е. В. Торопова*
Компьютерная верстка *Н. Н. Караваевой*

Сдано в набор 27.10.19. Подписано к печати 20.12.19.
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 10,4. Уч.-изд. л. 11,2.
Тираж 50 экз. Заказ № 554.

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67